令和７年度採用
山梨県公立学校教員選考検査

高等学校・数学　問題

「始め」という合図があるまで，このページ以外のところを見てはいけません。

注　　意

1　この問題は５問４ページで，時間は60分です。

2　解答用紙は，別紙で配付します。「始め」の合図で始めてください。

3　解答は，それぞれの問題の指示に従って解答用紙に記入してください。

4　「やめ」の合図があったら，すぐやめて係の指示に従ってください。

5　解答用紙を持ち出してはいけません。

令和７年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

高等学校 数学

1　高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）数学について，次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１）　次の文章は数学「 第２款 各科目 第２ 数学Ⅱ ３ 内容 (5) 微分・積分の考え」を示したものである。文中の① ～ ④に当てはまる語句を，下の【語群】からそれぞれ一つ選び，記せ。

> (5) 微分・積分の考え
>
> 微分と積分の考えについて，数学的活動を通して，その有用性を認識するとともに，次の事項を身に付けることができるよう指導する。
>
> ア　次のような知識及び技能を身に付けること。
>
> (ｱ) （ ① ）や導関数の意味について理解し，関数の定数倍，和及び差の導関数を求めること。
>
> (ｲ) 導関数を用いて関数の値の（ ② ）や極大・極小を調べ，グラフの概形をかく方法を理解すること。
>
> (ｳ) 不定積分及び定積分の意味について理解し，関数の定数倍，和及び差の不定積分や定積分の値を求めること。
>
> イ　次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。
>
> (ｱ) 関数とその導関数との関係について考察すること。
>
> (ｲ) 関数の（ ③ ）な変化に着目し，日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え，問題を解決したり，解決の（ ④ ）を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすること。
>
> (ｳ) 微分と積分の関係に着目し，積分の考えを用いて直線や関数のグラフで囲まれた図形の面積を求める方法について考察すること。

【語群】

視覚的	局所的	位置関係	過程	微分可能性
微分係数	包摂関係	近似値	一意性	増減

（２）　（１）の文章中の下線部の内容について，次の（ア），（イ）に答えよ。

（ア）　次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \qquad (\text{ただし}\ \beta>\alpha\ \text{とする})$$

（イ）　一般に，放物線 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a>0)$ と直線 $g(x)=mx+n$ のグラフが　２点を共有し，共有点の x 座標が α，β $(\alpha<\beta)$ であるとき，この２つのグラフに囲まれる部分の面積Ｓは a，α，β のみで表すことができる。生徒からこの理由を問われたときの具体的指導例を，数式を用いながら記せ。

2　次の（１），（２）の問いに答えよ。

（１）　以下は，対数方程式の問題とその問題を解いたＡさんの解答であるが，不十分である。不十分である理由を示し，正しい解答を記せ。

問題

方程式　$\log_3(x+1)^2=2$

を解け

Ａさんの解答

左辺を変形して

$$2\log_3(x+1)=2$$
$$\log_3(x+1)=1$$
$$x=2$$

（２）　不等式 $\log_3(x+1)^2>2$ の解を考える際に，関数 $y=\log_3(x+1)^2-2$ のグラフを考察して指導するとき，その具体的な指導例を記せ。なお，指導に用いるグラフについては，解答用紙の指定された欄に書くこと。

3　変量 x についてのデータは，n 個の値 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ であり，変量 x のデータの平均値を $\overline{x}$，分散を v_x とする。a，b を定数として，式 $y=ax+b$ で新しい変量 y を作る。

このとき変量 y のデータの平均値 $\overline{y}$ と分散 v_y がそれぞれ，$\overline{y}=a\overline{x}+b$，$v_y=a^2v_x$ で表されることを示せ。

4　x, y, z, w は自然数であるとする。方程式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{2z}+\dfrac{1}{3w}=\dfrac{7}{3}$ を満たす自然数の組 (x, y, z, w) をすべて求めよ。

5　無限級数について，次の（1），（2）に答えよ。ただし，m，n は自然数とする。

（1）　下の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)}{n^2+3n+2}$$

（2）　下の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+\frac{m}{m+1}-\frac{m+1}{m+2}+\frac{m+1}{m+2}-\frac{m+2}{m+3}+\cdots$$

※ 印のところは記入しない

受検番号		氏名		※	

切り取らないこと

令和７年度採用　山梨県公立学校教員選考検査

※

高等学校　数学　解答例

1　30点

（1）　①　微分係数　②　増減　③　局所的　④　過程

（ア）

【証明】例①

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=\frac{\beta-\alpha}{6}\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}$$
$$=\frac{\beta-\alpha}{6}(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

【証明】例②

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(x-\alpha)^2dx$$
$$=0-\frac{1}{6}[(x-\alpha)^3]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

（2）

（イ）

$a>0$ より，$f(x)$ は下に凸の放物線であり，区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $f(x)\leqq g(x)$ なので

$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}\,dx$ ・・・①と表すことができる。ここで，$g(x)-f(x)=0$ が２次方程式で実数解 α，β をもつことと，$g(x)-f(x)$ の２次の項の係数が，$-a$ であることから，因数定理より b，c，m，n を用いずに，$g(x)-f(x)=-a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解される。

したがって①は，$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{-a(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx$ と変形できる。

S は（ア）の等式を用いて $S=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$ となり，a，α，β のみで表すことができる。

2　20点

（1）

【不十分である理由】

Aさんは $\log_3(x+1)^2=2\log_3(x+1)$ と変形したが，左辺と右辺の真数条件が異なってしまい同値変形になっていないから。

（左辺：$x\neq-1$，右辺：$x>-1$）

【正しい解答】

$\log_3(x+1)^2=2$
$2\log_3|x+1|=2$
$|x+1|=3$
$x=-4,2$

〈 別解 〉

$\log_3(x+1)^2=2$
$(x+1)^2=9$
$x=-4,2$

（2）

【具体的な指導例】

- $y=\log_3x^2$ のグラフをもとに $y=\log_3(x+1)^2-2$ のグラフを考えさせる。
- $f(x)=\log_3x^2$ とおくと $f(-x)=f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは y 軸対称である。$x>0$ のとき $f(x)=2\log_3x$ であるから，（1，0）を通る単調増加のグラフである。よって，$x<0$ のとき（-1，0）を通る単調減少のグラフとなる。
- 関数 $y=\log_3(x+1)^2-2$ のグラフは，$f(x)=\log_3x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に -2 平行移動したグラフである。

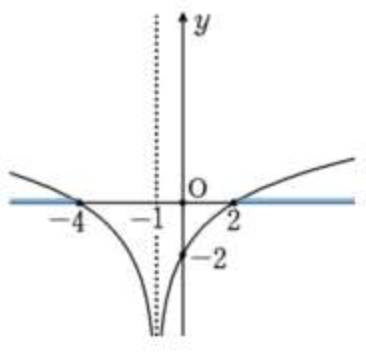
  直線 $x=-1$ に関して線対称であり，$x=-1$ を漸近線にもつグラフである。他にも $x>-1$ のとき単調増加，$x<-1$ のとき単調減少で，

  $\lim_{x\to\infty}y=\infty$，$\lim_{x\to-1+0}y=-\infty$，$\lim_{x\to-\infty}y=\infty$，$\lim_{x\to-1-0}y=-\infty$

  などの特徴がある。
- $y=\log_3(x+1)^2-2$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ とおいた方程式 $\log_3(x+1)^2=2$ の解であるので，$x=-4,2$ が得られる。
- $\log_3(x+1)^2-2>0$ の解は，グラフにおいて，$y>0$ となる x の値の範囲であるから $x<-4$，$2<x$ がグラフから得られる。

【 グラフ 】

$y=\log_3(x+1)^2-2$



（裏面につづく）

3　16点

【 $\overline{y}=a\overline{x}+b$ の証明】

$y_1=ax_1+b, y_2=ax_2+b, \cdots\cdots, y_n=ax_n+b$　であるから

変量 y のデータの平均値 $\overline{y}$ は $\overline{y}=\frac{1}{n}\{(ax_1+b)+(ax_2+b)+\cdots\cdots+(ax_n+b)\}$

$=\frac{1}{n}\{a(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)+nb\}=a\cdot\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)+b=a\overline{x}+b$

【$v_y=a^2v_x$ の証明】例①

$y_k-\overline{y}=(ax_k+b)-(a\overline{x}+b)=a(x_k-\overline{x})$

$(k=1,2,3,\cdots\cdots,n)$ であることから

変量 y のデータの分散 v_y は

$v_y=\frac{1}{n}\{a^2(x_1-\overline{x})^2+a^2(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+a^2(x_n-\overline{x})^2\}$

$=a^2\cdot\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}=a^2v_x$

【$v_y=a^2v_x$ の証明】例②

$y_k-\overline{y}=(ax_k+b)-(a\overline{x}+b)=a(x_k-\overline{x})$

$(k=1,2,3,\cdots\cdots,n)$ であることから，

変量 y のデータの分散 v_y は

$v_y=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\overline{y})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a^2(x_k-\overline{x})^2$

$=a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2=a^2v_x$

4　14点

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{7}{3}$ ……①　とする。自然数の最小性より

$\frac{1}{x}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geqq\frac{7}{3}$　から　$\frac{1}{x}\geqq\frac{1}{2}$　となり　$x\leqq2$　を得る。x は自然数より，$x=1$，2　の場合を考える。

（ⅰ）$x=2$ のとき

①に代入して，$\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{11}{6}$

自然数の最小性より，$\frac{1}{y}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geqq\frac{11}{6}$　から

$y\leqq1$ となり　$y=1$ を得る。

①へ　$x=2$，$y=1$ を代入すると

$\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{5}{6}$　となる。

自然数の最小性より　$\frac{1}{2z}+\frac{1}{3}\geqq\frac{5}{6}$　から

$z\leqq1$　より　$z=1$　を得る。

したがって　$w=1$　を得る。

∴①を満たす自然数の組は

$(x,y,z,w)=(2,1,1,1)$　となる。

（ⅱ）$x=1$ のとき

①に代入して，$\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{4}{3}$

自然数の最小性より

$\frac{1}{y}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geqq\frac{4}{3}$　から　$y\leqq2$ となり　$y=1$ または $y=2$

（ア）$x=1$，$y=2$ のとき

（ⅰ）と同様であるから，$z=1$，$w=1$ を得る

（イ）$x=1$，$y=1$ のとき

$\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{1}{3}$　となり

$(2z-3)(w-1)=3$ と変形できる

よって　$(2z-3,w-1)=(1,3),(3,1)$

ゆえに　$(z,w)=(2,4),(3,2)$

（ⅰ），（ⅱ）より，①を満たす自然数の組は，

$(x,y,z,w)=(2,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,4),(1,1,3,2)$ の４組である。

5　20点

（1）

無限級数の一般項 a_n を $a_n=\frac{-1}{n^2+3n+2}$　とおき，次のように変形する。

$a_n=\frac{-1}{n^2+3n+2}=-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$　ここで，数列 a_n の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$S_n=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right)=-\frac{1}{2}$　したがって，この無限級数は収束し，その和は $-\frac{1}{2}$ である。

（2）

初項a_1 から第k 項 a_k までの和を S_k とする。

（ア）$k=2m-1$ のとき　　$S_k=S_{2m-1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cdots\cdots-\frac{m}{m+1}+\frac{m}{m+1}=\frac{1}{2}$

$k\to\infty$ のとき $m\to\infty$ であるから　$\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\frac{1}{2}$

（イ）$k=2m$ のとき，第 $2m$ 項をa_{2m} とすると，$S_k=S_{2m}=S_{2m-1}+a_{2m}=\frac{1}{2}-\frac{m+1}{m+2}=\frac{-m}{2(m+2)}$

$k\to\infty$ のとき $m\to\infty$ であるから　$\lim_{k\to\infty}S_k=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{-1}{2(1+\frac{2}{m})}=-\frac{1}{2}$

（ア），（イ）より，この無限級数は発散する。