高校数学　専門問題例

例１　次の(1)・(2)の問いに答えなさい。

(1)　方程式 $2xy-5x+2y-9=0$ の整数解を求めなさい。

(2)　$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ 1<x<y<z \end{cases}$ を満たす整数 x，y，z の値を求めなさい。

（令和元年度）

例２　関数 $y=\sin 2\theta-2\sin\theta-2\cos\theta-1$ ･･･①　について，次の(1)～(3)の問いに答えなさい。

(1)　$x=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，①について，y を x の式で表しなさい。

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，x の値の範囲を求めなさい。

(3)　y の最大値と最小値，またそのときの θ の値を求めなさい。

（令和元年度）

例３　$f(x)=\left|\log_{10}x\right|$ とする。等式 $f(a)=f(b)=3f(\frac{a+b}{2})$　$(0<a<b)$ が成り立つとき，

a，b が満たす条件を求めなさい。

（令和２年度）

例４　座標平面上に，円 C : $x^2+y^2-4x-5=0$ および，直線 ℓ : $y=2x+k$ があり，C と ℓ は異なる２点Ｐ，Ｑを共有する。このとき，次の(1)・(2)の問いに答えなさい。ただし，k は実数とする。

(1)　k の値の範囲を求めなさい。

(2)　C と ℓ の共有点Ｐ，Ｑについて，ＰＱ＝４となるとき，k の値を求めなさい。

（令和２年度）

例５　座標空間において，x が $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，２点 $\mathrm{P}(x,0,\cos^2x)$，

$\mathrm{Q}(x,1-\sin x,0)$ を結ぶ直線ＰＱが動いてできる曲面を S とする。このとき，曲面 S と xy 平面，yz 平面，zx 平面で囲まれる立体の体積 V を求めなさい。

（令和３年度）

例６　次の文は，高等学校学習指導要領「数学」の「第１款　目標」の一部である。（　a　）～（　e　）にあてはまる語句を書きなさい。

(1) 数学における基本的な概念や原理・法則を（　a　）に理解するとともに，事象を（　b　）したり，数学的に解釈したり，数学的に（　c　）したりする技能を身に付けるようにする。

(2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，事象の本質や（　d　）との関係を認識し（　e　）に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。

（令和３年度）

高校数学　正答例

問題番号		正　答　例
例１	(1)	与式を変形すると， $(2y-5)(x+1)=4$ $2y-5$ は奇数より， $(2y-5,x+1)=(\pm1,\pm4)$ （複号同順） これより， $(x,y)=(-5,2),(3,3)$
	(2)	$1<x<y<z$ $\cdots$①より， $\frac{1}{z}<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}<1$ よって， $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$ これより $x<3\cdots$② また，①と②より $1<x<3$ よって，これを満たす整数 x は， $x=2\cdots$③ ③を与式に代入し，整理すると $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ 同様に， $\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$ これより $y<4\cdots$④ ①，③，④より $2<y<4$ よって，これを満たす整数 y は， $y=3\cdots$⑤ ③，⑤を与式に代入して， $z=6$ $(x,y,z)=(2,3,6)$

<table>
<tr><th colspan="2">問題番号</th><th>正　　答　　例</th></tr>
<tr><td rowspan="3">**例２**</td><td>(1)</td><td>$x = \sin\theta + \cos\theta$ の両辺を２乗し整理すると，
$2\sin\theta\cos\theta = x^2 - 1$，また，　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$　よって，①について y を x の式で表すと，
$y = x^2 - 2x - 2$</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>$x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$
$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$
これより，$-1 \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$
よって，$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>(1)，(2)より
$y = (x-1)^2 - 3$　$(-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2})$
$x = 1$ のとき，
$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ より，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$
$\therefore\ \theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき，最小値 -3
$x = -\sqrt{2}$ のとき，
$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ より，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$　　$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$
$\therefore\ \theta = \frac{5}{4}\pi$ のとき，最大値 $2\sqrt{2}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">問題番号</th><th>正　　答　　例</th></tr>
<tr><td colspan="2">例３</td><td>
$f(a)=f(b)$ より，$\left|\log_{10} a\right|=\left|\log_{10} b\right|$
$\therefore \log_{10} a=\pm\log_{10} b$
$a<b$ より $\log_{10} a\neq\log_{10} b$ だから
$\log_{10} a=-\log_{10} b \Leftrightarrow \log_{10} a+\log_{10} b=0 \Leftrightarrow \log_{10} ab=0$
すなわち，$ab=1$　　　　　　　　―（ⅰ）
このとき，$0<a<b$ より，$b>1$
相加平均と相乗平均の大小関係より
$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}=1$ であるから，
$\log_{10} b>0,\ \log_{10}\dfrac{a+b}{2}>0$ となるので　　　―（ⅱ）
$f(b)=3f(\dfrac{a+b}{2})$ より，$\log_{10} b=3\log_{10}\dfrac{a+b}{2}$
すなわち，$b=(\dfrac{a+b}{2})^3$　　　　　　―（ⅲ）
よって，求める条件は
$ab=1$，$b=(\dfrac{a+b}{2})^3$
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">例４</td><td>(1)</td><td>
Cの方程式は$(x-2)^2+y^2=9$ であるから，Cは
中心（２，０），半径3の円である。
中心と ℓ との距離 d は，
$d=\dfrac{|2\cdot 2+k-0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k+4|}{\sqrt{5}}$ であるから，
Cと ℓ は異なる2点を共有する$\Leftrightarrow d<3$となるので，
$\dfrac{|k+4|}{\sqrt{5}}<3$ ―（ⅰ）　$\therefore |k+4|<3\sqrt{5}$
したがって，$-3\sqrt{5}<k+4<3\sqrt{5}$
$\therefore -4-3\sqrt{5}<k<-4+3\sqrt{5}$
</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>
線分 PQ の中点を M，円 Cの中心を C（２，０）と
おくと，CM⊥PQであるから，
CP ＝ 3，PM ＝ 2 より CM $=\sqrt{\mathrm{CP}^2-\mathrm{PM}^2}=\sqrt{5}$
CM は中心 C と ℓ との距離 d であるので，
$\dfrac{|k+4|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ ―（ⅱ）　$\therefore |k+4|=5$
したがって，$k+4=\pm 5$　$\therefore k=1,-9$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">問題番号</th><th colspan="2">正　答　例</th></tr>
<tr><td colspan="2">例５</td><td colspan="2">
Ｒ（x，０，０）とすると，
△ＰＲＱは∠ＰＲＱ＝$\dfrac{\pi}{2}$の直角三角形で
x軸に垂直である。
ＰＲ＝$\cos^2 x$，ＲＱ＝$1-\sin x$ より
△ＰＲＱ＝$\dfrac{1}{2}(1-\sin x)\cos^2 x$
ゆえに，
$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}(1-\sin x)\cos^2 x\,dx$
$=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\cos^2 x+\cos^2 x(-\sin x)\right\}dx$
$=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{2}(\cos 2x+1)\,dx+\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x(-\sin x)dx$
$=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{2}\sin 2x+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$=\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{6}$
</td></tr>
<tr><td rowspan="5">例６</td><td rowspan="3">(1)</td><td>a</td><td>体系的</td></tr>
<tr><td>b</td><td>数学化</td></tr>
<tr><td>c</td><td>表現・処理</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>d</td><td>他の事象</td></tr>
<tr><td>e</td><td>統合的・発展的</td></tr>
</table>