令８　中学校・高等学校数学（５枚のうち１）

（解答はすべて、解答用紙に記入すること）

Ⅰ　次の問いに答えなさい。ただし、解答は答えのみでよい。

(1)　$a<0$、$\alpha<\beta$であるとき、2次関数 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ について、正しいものを、次の**ア**～**エ**からすべて選んで、その符号を書きなさい。

ア　$y=0$ としたときの2次方程式 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ の判別式の値は正である。

イ　$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフは下に凸の放物線である。

ウ　$\alpha+\beta>0$ のとき、$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフの頂点は第4象限にある。

エ　$\alpha\beta<0$ のとき、$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ のグラフは y 軸と正の部分で交わる。

(2)　3^{2026} の一の位の数を求めなさい。

(3)　1辺の長さが1である正五角形ABCDEがある。

①　∠ABEの大きさを求めなさい。

②　対角線BEの長さを求めなさい。

(4)　関数 $y=4^x+4^{-x}+2^x+2^{-x}$ の最小値と、そのときの x の値を求めなさい。

(5)　△OABにおいて、OA＝5、OB＝4、∠AOB＝60°である。また、頂点Oから辺ABに下した垂線をOHとし、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

①　$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表しなさい。

②　辺OAを1：4に内分する点をCとし、線分BCと線分OHの交点をDとする。このとき、$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表しなさい。

(6)　関数 $y=e^x\sin x$ はすべての x の値に対して、等式 $y''+ay'+by=0$ を満たす。このとき、定数 a、b の値を求めなさい。

令８　中学校・高等学校数学（５枚のうち２）

（解答はすべて、解答用紙に記入すること）

Ⅱ　△ABC において、AB＝6、AC＝7、$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{4}$ である。また、∠ABC の二等分線と辺 AC の交点を D、直線 BD と△ABC の外接円との交点のうち、点 B と異なる点を E とするとき、次の問いに答えなさい。

⑴　辺 BC の長さと△ABC の面積をそれぞれ求めなさい。ただし、解答は答えのみでよい。

⑵　線分 BD の長さを求めなさい。また、線分 BE の長さを求めなさい。

⑶　平面 BCE 上にない点 O を OB＝OC＝OE＝8 となるようにとる。このとき、四面体 OBCE の体積を求めなさい。

Ⅲ　赤玉２個が入った袋Ａと、白玉３個が入った袋Ｂがある。ここで、「袋Ａから玉を無作為に１個取り出して袋Ｂに入れ、袋Ｂの玉をよくかき混ぜてから玉を１個取り出して袋Ａに入れる」という操作を n 回繰り返したとき、袋Ａの中に赤玉が２個、１個、０個入っている確率を、それぞれ p_n 、q_n 、r_n とする。このとき、次の問いに答えなさい。

⑴　p_1 、q_1 、q_2 を求めなさい。ただし、解答は答えのみでよい。

⑵　p_{n+1} 、q_{n+1} を、それぞれ p_n 、q_n を用いて表しなさい。ただし、解答は答えのみでよい。

⑶　p_n 、q_n を、それぞれ n を用いて表しなさい。

⑷　$\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めなさい。

Ⅳ　座標平面上に、曲線 $C : y=x+|x(x-2)|$ と直線 $\ell : y=ax$ がある。曲線 C と直線 ℓ の異なる共有点の個数が３個であるとき、次の問いに答えなさい。ただし、a は定数とする。

⑴　曲線 C のグラフをかきなさい。

⑵　a の値の範囲を求めなさい。ただし、解答は答えのみでよい。

⑶　曲線 C と直線 ℓ で囲まれた２つの部分の面積が等しいとき、a の値を求めなさい。

数学 3/5 受験番号

令８　中学校・高等学校数学解答用紙（５枚のうち３）

総計		

数学

Ⅰ	(1)				
	(2)				
	(3)	①	度	②	
	(4)	$x=$　　　　のとき、最小値			
	(5)	①	$\overrightarrow{OH}=$		
		②	$\overrightarrow{OD}=$		
	(6)	$a=$　　　　、$b=$			
Ⅱ	(1)	辺 BC の長さ		△ABC の面積	
	(2)				
	(3)				

Ⅰ		

Ⅱ		

数学 4/5

受験番号

数学

令８　中学校・高等学校数学解答用紙（５枚のうち４）

Ⅲ	(1)	p_1		q_1		q_2	
	(2)						
	(3)						
	(4)						

Ⅲ		

数学 5/5

受験番号

令８　中学校・高等学校数学解答用紙（５枚のうち５）

数学

Ⅳ	(1)	
	(2)	
	(3)	

Ⅳ		

受験番号

令８　中学校・高等学校数学模範解答（５枚のうち３）

総計 200

Ⅰ

(1)	ア 、 エ	
(2)	9	
(3)	① 36 度	② $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
(4)	$x=$ 0 のとき、最小値 4	
(5)	① $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{7}\vec{a}+\dfrac{5}{7}\vec{b}$	
	② $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{15}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$	
(6)	$a=$ -2 、 $b=$ 2	

Ⅰ 60

Ⅱ

(1)	辺 BC の長さ	8	△ABC の面積	$\dfrac{21\sqrt{15}}{4}$

(2)

点 D は∠ABC の二等分線と辺 AC の交点であるから、

$\mathrm{AD}:\mathrm{DC}=\mathrm{BA}:\mathrm{BC}=6:8=3:4$

よって、$\mathrm{AD}=7\times\dfrac{3}{3+4}=3$

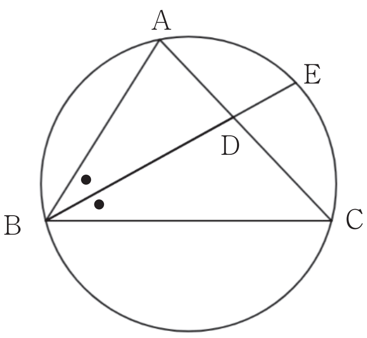
余弦定理より、$\mathrm{BD}^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cdot\dfrac{1}{4}=36$

$\mathrm{BD}>0$ より、$\mathrm{BD}=\sqrt{36}=6$

方べきの定理より、BD・DE＝AD・DC であるから、

$6\mathrm{DE}=3\cdot4$ より、$\mathrm{DE}=2$

ゆえに、$\mathrm{BE}=\mathrm{BD}+\mathrm{DE}=6+2=8$



(3)

点 O から平面 BCE に下した垂線を OH とすると、

$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OE}$、$\angle\mathrm{OHB}=\angle\mathrm{OHC}=\angle\mathrm{OHE}=90^\circ$ より、

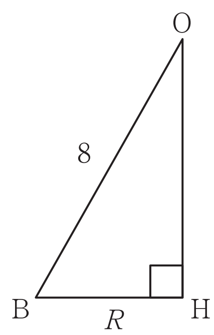
$\triangle\mathrm{OBH}\equiv\triangle\mathrm{OCH}\equiv\triangle\mathrm{OEH}$ であるから、$\mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\mathrm{EH}$ となる。

したがって、点 H は△BCE の外接円の中心である。

△BCE の外接円は△ABC の外接円でもあるので、その半径を R とすると、

正弦定理より、$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=2R$ であるから、

$$R=\frac{8}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\times\frac{1}{2}=\frac{16}{\sqrt{15}}$$



三平方の定理より、$\mathrm{OH}=\sqrt{8^2-\left(\dfrac{16}{\sqrt{15}}\right)^2}=8\sqrt{1^2-\left(\dfrac{2}{\sqrt{15}}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{11}}{\sqrt{15}}$

△ABC の面積を S、△BCE の面積を S_1 とすると、$S_1=\dfrac{4}{7}S\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{21}S=\dfrac{16}{21}\cdot\dfrac{21\sqrt{15}}{4}=4\sqrt{15}$

よって、四面体 OBCE の体積は、$\dfrac{1}{3}\cdot S_1\cdot\mathrm{OH}=\dfrac{1}{3}\cdot4\sqrt{15}\cdot\dfrac{8\sqrt{11}}{\sqrt{15}}=\dfrac{32\sqrt{11}}{3}$

Ⅱ 40

令８　中学校・高等学校数学模範解答（５枚のうち４）

Ⅲ

(1)	p_1	$\frac{1}{4}$	q_1	$\frac{3}{4}$	q_2	$\frac{21}{32}$

(2)

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{8}q_n$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{8}q_n+\frac{1}{2}$$

(3)

(2)から、$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{8}q_n$ ……①

$q_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{8}q_n+\frac{1}{2}$ ……②

①－②から、$p_{n+1}-q_{n+1}=-\frac{1}{2}$

つまり、　$q_{n+1}=p_{n+1}+\frac{1}{2}$　$(n\geqq 1)$

$\Leftrightarrow$　$q_n=p_n+\frac{1}{2}$　$(n\geqq 2)$

(1)から $p_1=\frac{1}{4}$、$q_1=\frac{3}{4}$ であるから、この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって、$q_n=p_n+\frac{1}{2}$　$(n\geqq 1)$ ……③

③を①に代入して、$p_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{8}\left(p_n+\frac{1}{2}\right)$

$p_{n+1}=\frac{3}{8}p_n+\frac{1}{16}$

変形すると、　$p_{n+1}-\frac{1}{10}=\frac{3}{8}\left(p_n-\frac{1}{10}\right)$

数列 $\left\{p_n-\frac{1}{10}\right\}$ は、初項 $p_1-\frac{1}{10}=\frac{1}{4}-\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$、公比 $\frac{3}{8}$ の等比数列であるから、

$p_n-\frac{1}{10}=\frac{3}{20}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}$

よって、　$p_n=\frac{3}{20}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{10}$

また③から、$q_n=\frac{3}{20}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}+\frac{3}{5}$

(4)

$p_n+q_n+r_n=1$ より、

$r_n=1-p_n-q_n$

$=1-\left\{\frac{3}{20}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}+\frac{1}{10}\right\}-\left\{\frac{3}{20}\left(\frac{3}{8}\right)^{n-1}+\frac{3}{5}\right\}$ より、

$\lim_{n\to\infty} r_n=1-\frac{1}{10}-\frac{3}{5}$

$=\frac{3}{10}$

Ⅲ	50	

令8　中学校・高等学校数学模範解答（5枚のうち5）

Ⅳ

(1)

曲線 C : $y=x+|x(x-2)|$ について、

$x\leqq 0$、$2\leqq x$ のとき、 $y=x+x(x-2)$

$=x^2-x$

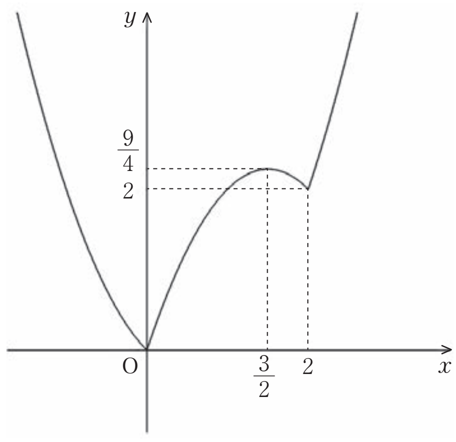
$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

$0<x<2$ のとき、 $y=x-x(x-2)$

$=-x^2+3x$

$=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

したがって、曲線 C のグラフは図のようになる。



(2)

$1<a<3$

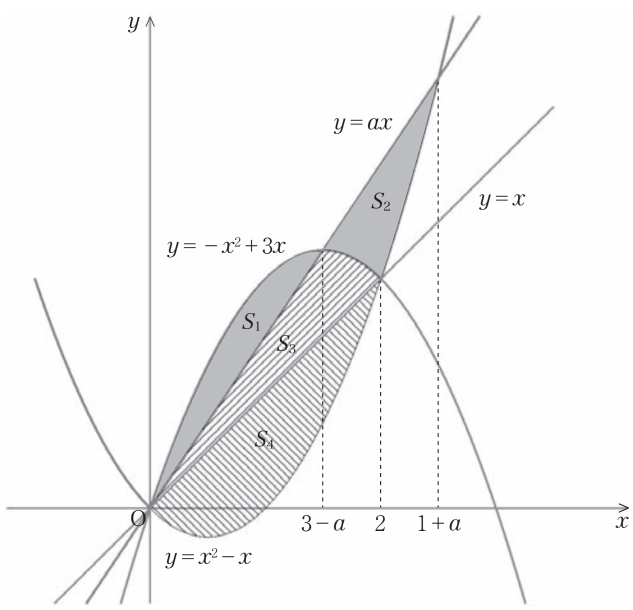
(3)

図のように、曲線 C と直線 ℓ で囲まれた2つの部分（網掛け部分）の面積をそれぞれ S_1、S_2 とする。

さらに、図の2つの図形（斜線部分）の面積をそれぞれ S_3、S_4 とすると、

$S_1=S_2 \Leftrightarrow S_1+S_3+S_4=S_2+S_3+S_4$

である。



$S_1+S_3+S_4 =\displaystyle\int_0^2\left\{(-x^2+3x)-(x^2-x)\right\}dx$

$=-2\displaystyle\int_0^2 x(x-2)dx$

$=-2\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)\times(2-0)^3$

$=\dfrac{8}{3}$

また、方程式 $x^2-x=ax$ を解くと、

$x(x-1-a)=0$ から、$x=0$、$1+a$

$S_2+S_3+S_4 =\displaystyle\int_0^{1+a}\left\{ax-(x^2-x)\right\}dx$

$=-\displaystyle\int_0^{1+a}x\left\{x-(1+a)\right\}dx$

$=-1\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)\times\left\{(1+a)-0\right\}^3$

$=\dfrac{1}{6}(1+a)^3$

したがって、 $\dfrac{1}{6}(1+a)^3=\dfrac{8}{3}$

$(1+a)^3=16$

$1+a=\sqrt[3]{16}$

ゆえに、 $a=2\sqrt[3]{2}-1$

（$1<a<3$ を満たす。）

Ⅳ 50		