検査Ⅲ　　数　　学

解答上の注意　　解答は，全て**解答用紙**に記入すること。
ただし，１と５（１）は答えのみでよい。

1　次の問いに答えなさい。

（１）２次関数 $y=ax^2-2ax+b$ の $0\leqq x\leqq 3$ における最大値が９，最小値が１となるとき，定数 a，b の値を求めなさい。ただし，$a<0$ とする。

（２）ARUKUMAの７個の文字すべてを１列に並べるとき，２個のＡが隣り合わない確率を求めなさい。

（３）AB=4，BC=6，CA=5である△ABCの内心をＩとする。このとき，$\overrightarrow{AI}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表しなさい。

（４）$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a+b-1}$ の値を求めなさい。

（５）確率密度関数が $f(x)=x+\dfrac{1}{2}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ である確率変数 X について，期待値 $E(X)$ を求めなさい。

（６）a，b は実数とする。３次方程式 $x^3-4x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，定数 a，b の値を求めなさい。

（７）定積分 $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ を求めなさい。

2　$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$y=\sin 2\theta+\sin\theta+\cos\theta$ について，次の問いに答えなさい。

（１）$t=\sin\theta+\cos\theta$ として，y を t の関数で表しなさい。

（２）t のとりうる値の範囲を求めなさい。

（３）y の最大値と最小値を求めなさい。ただし，最大値および最小値をとるときの θ の値は求めなくてよい。

検査Ⅲ　　数　　学

3　２次関数 $y=x^2-(k+2)x+k^2$ のグラフが x 軸と異なる２点で交わるとき，次の問いに答えなさい。ただし，k は定数とする。

（１）k の値の範囲を求めなさい。

（２）k を自然数とするとき，このグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めなさい。

（３）このグラフが x 軸から切り取る線分の長さが自然数となるとき，k の値を求めなさい。

4　６人をいくつかの部屋に分けるとき，次の分け方は何通りあるか求めなさい。ただし，最低でも１人は部屋に入るものとする。

（１）A，B２つの部屋に分ける。

（２）A，B，C３つの部屋に分ける。

（３）A，B，C，D４つの部屋に分ける。

5　$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n{}^3+1}{3a_n{}^2}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えなさい。

（１）a_2 を求めなさい。

（２）すべての自然数 n について $a_n>1$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示しなさい。

（３）すべての自然数 n について $a_n>a_{n+1}$ が成り立つことを示しなさい。

6　無限等比級数 $x+x(1-x^2)+x(1-x^2)^2+\cdots+x(1-x^2)^{n-1}+\cdots$ について，次の問いに答えなさい。

（１）この級数が収束するような x の値の範囲を求めなさい。

（２）（１）の範囲でこの級数の和を $f(x)$ とおく。$y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

7　関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ について，次の問いに答えなさい。

（１）曲線 $y=f(x)$ の概形をかきなさい。ただし，凹凸は調べなくてよい。また，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$ を用いてよい。

（２）不等式 $f(e)>f(\pi)$ を証明しなさい。

（３）e^π と π^e の大小を比較しなさい。

記号	数	番号	

検査Ⅲ　**数学解答用紙**

1　【各５点　計 35 点】

(1)	$a=-2$，$b=7$
(2)	$\frac{5}{7}$
(3)	$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{15}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
(4)	$\frac{5\sqrt{3}-1}{2}$
(5)	$\frac{7}{12}$
(6)	$a=9$，$b=-10$
(7)	$\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)$

2　【各５点　計 15 点】

(1)	$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\sin 2\theta+1$ であるから， $\sin 2\theta=t^2-1$ よって，$y=\sin 2\theta+\sin\theta+\cos\theta=t^2+t-1$
(2)	$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ $0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\frac{\pi}{4}\leqq\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから，$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$ よって，t のとりうる値の範囲は $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$
(3)	$y=t^2+t-1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ より $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ における最大値は $t=\sqrt{2}$ で $1+\sqrt{2}$ をとり， 最小値は $t=-\frac{1}{2}$ で $-\frac{5}{4}$ をとる

記号	数	番号	

検査Ⅲ　**数学解答用紙**

3　【(1)(2)各５点，(3)６点　計16点】

(1)	２次方程式 $x^2-(k+2)x+k^2=0$ …① の判別式をDとすると $D=\{-(k+2)\}^2-4k^2=-3k^2+4k+4$ $D>0$より $-3k^2+4k+4>0$ $3k^2-4k-4<0$ $(k-2)(3k+2)<0$　　よって　$-\frac{2}{3}<k<2$
(2)	kは自然数であるから，(1) より $k=1$ このとき，①は $x^2-3x+1=0$　　これを解いて $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ これがグラフとx軸の共有点のx座標である。 よって，求める線分の長さは$\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$
(3)	(1)のとき，①を解いて　$x=\frac{k+2\pm\sqrt{-3k^2+4k+4}}{2}$ これがグラフとx軸の共有点のx座標であるから，線分の長さをLとすると $L=\sqrt{-3k^2+4k+4}$…②　（Lは自然数） ここで，$-3k^2+4k+4=-3\left(k-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{16}{3}$であるから$0<L^2\leqq\frac{16}{3}$ この範囲でL^2が平方数となるのは$L^2=1$または$L^2=4$ [1]　$L^2=1$のとき ②は$-3k^2+4k+4=1$　整理して$3k^2-4k-3=0$　これを解いて　$k=\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$ [2]　$L^2=4$のとき ②は$-3k^2+4k+4=4$　整理して$3k^2-4k=0$　これを解いて　$k=0$，$\frac{4}{3}$ 以上より　求めるkの値は$k=\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}$，0，$\frac{4}{3}$

記号	数	番号	

検査Ⅲ　**数学解答用紙**

4　【各５点　計 15 点】

(1)	６人それぞれをＡ，Ｂどちらの部屋に分けるか考えて　2^6 通り このうち，１つの部屋だけを使用するのは　２通り よって，求める場合の数は　$2^6-2=62$（通り）
(2)	６人それぞれをＡ，Ｂ，Ｃのどの部屋に分けるか考えて　3^6 通り このうち， １つの部屋だけを使用するのは　３通り ２つの部屋だけを使用するのは，(1)を用いて　$62\times{}_3C_2$（通り） よって，求める場合の数は　$3^6-(3+62\times{}_3C_2)=540$（通り）
(3)	６人それぞれをＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄのどの部屋に分けるか考えて　4^6 通り このうち， １つの部屋だけを使用するのは　４通り ２つの部屋だけを使用するのは，(1)を用いて　$62\times{}_4C_2$（通り） ３つの部屋だけを使用するのは，(2)を用いて　$540\times{}_4C_3$（通り） よって，求める場合の数は　$4^6-(4+62\times{}_4C_2+540\times{}_4C_3)=1560$（通り）

記号	数	番号	

検査Ⅲ　**数学解答用紙**

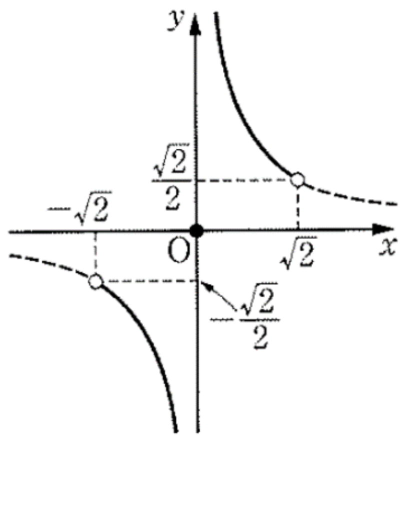
5　【(1) 3点，(2) (3)各5点　計13点】

(1)	$a_2=\dfrac{17}{12}$
(2)	[1]　$n=1$のとき　$a_1=2>1$であるから$a_n>1$は成り立つ [2]　$n=k$のとき　$a_k>1$と仮定する $n=k+1$のとき　$a_{k+1}-1=\dfrac{2a_k^{\ 3}+1}{3a_k^{\ 2}}-1=\dfrac{2a_k^{\ 3}-3a_k^{\ 2}+1}{3a_k^{\ 2}}=\dfrac{(a_k-1)^2(2a_k+1)}{3a_k^{\ 2}}$ 仮定より$a_k>1$であるから$a_{k+1}-1>0$　すなわち$a_{k+1}>1$ よって，$n=k+1$のときも$a_n>1$は成り立つ [1][2]よりすべての自然数nについて$a_n>1$が成り立つ
(3)	$a_n-a_{n+1}=a_n-\dfrac{2a_n^{\ 3}+1}{3a_n^{\ 2}}=\dfrac{3a_n^{\ 3}-2a_n^{\ 3}-1}{3a_n^{\ 2}}=\dfrac{a_n^{\ 3}-1}{3a_n^{\ 2}}$ (2) より　すべての自然数nについて$a_n>1$であるから$a_n^{\ 3}>1$　よって，$a_n^{\ 3}-1>0$ ゆえに　$a_n-a_{n+1}>0$　すなわち　$a_n>a_{n+1}$

記号	数	番号	

検査Ⅲ　**数学解答用紙**

6　【(1) 5点，(2) 6点　計11点】

(1)	$x+x(1-x^2)+x(1-x^2)^2+\cdots+x(1-x^2)^{n-1}+\cdots$ は初項 x，公比 $1-x^2$ の 無限等比級数である。 よって，収束する条件は $x=0$　…①　または　$\left\|1-x^2\right\|<1$　…② ②より　$-1<1-x^2<1$ $0<x^2<2$ よって　$-\sqrt{2}<x<0,\ 0<x<\sqrt{2}$　…③ ①，③より収束する条件は $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$
(2)	［1］ $x=0$ のとき $f(0)=0$ ［2］ $-\sqrt{2}<x<0,\ 0<x<\sqrt{2}$ のとき $f(x)=\dfrac{x}{1-(1-x^2)}$ $=\dfrac{1}{x}$ ［1］，［2］より，グラフは右の図 

記号	数	番号	

検査Ⅲ　**数学解答用紙**

7　【(1) 6 点，(2) 4 点，(3) 5 点　計 15 点】

(1)

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$f'(x)=0$とすると$1-\log x=0$より　$x=e$

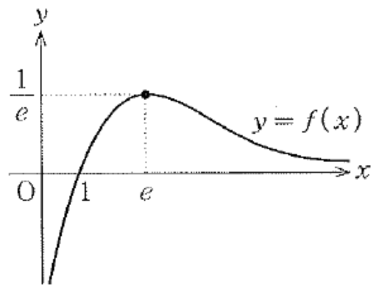
よって，$x>0$における$f(x)$の増減表は

右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	／	$+$	0	$-$
$f(x)$	／	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$

よって，曲線　$y=f(x)$の概形は右の図



(2)

(1)より，$f(x)$は区間　$x\geqq e$で単調に減少する。

$e<\pi$であるから　$f(e)>f(\pi)$

(3)

(2)より，$f(e)>f(\pi)$　であるから　$\dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log\pi}{\pi}$

$$\pi\log e>e\log\pi$$

よって　$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$

底eは1より大きいから　$e^{\pi}>\pi^{e}$