令７　中学校・高等学校数学（５枚のうち１）
（解答はすべて、解答用紙に記入すること）

Ⅰ　次の問いに答えなさい。解答は、答えのみでよい。

(1)　次の $\boxed{\text{①}}$ ～ $\boxed{\text{③}}$ に当てはまるものを、あとの**ア**～**オ**からそれぞれ１つ選んで、その符号を書きなさい。

自然数 n について、条件 p、q を次のように定める。

p：n は偶数である　　　　q：n は４の倍数である

命題「p ならば q」は $\boxed{\text{①}}$。

p は q であるための $\boxed{\text{②}}$。

$\overline{p}$ は $\overline{q}$ であるための $\boxed{\text{③}}$。

ア　真である
イ　偽である
ウ　必要十分条件である
エ　必要条件であるが、十分条件でない
オ　十分条件であるが、必要条件でない

(2)　次の $\boxed{\text{①}}$、$\boxed{\text{②}}$ に当てはまる数を、それぞれ求めなさい。

方程式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)=2$ の解について考えると、真数は正であるから、$x>$ $\boxed{\text{①}}$ である。

これにより、この方程式の解は $x=$ $\boxed{\text{②}}$ である。

(3)　複素数 $z=\sqrt{3}-i$ を極形式で表しなさい。ただし、i は虚数単位とし、偏角 θ の範囲は $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

(4)　直線 $y=\dfrac{3}{4}x$ と x 軸の正の向きとのなす角を２等分する直線の方程式を求めなさい。

(5)　正方形状のマスの中に１～９までの異なる自然数を入れて、各行（横方向）、各列（縦方向）、および２本の対角線上の数の和をすべて等しくするパズルがある。次の $\boxed{\text{①}}$、$\boxed{\text{⑥}}$ に当てはまる数、$\boxed{\text{⑦}}$ に当てはまる式をそれぞれ求めなさい。また、$\boxed{\text{②}}$ ～ $\boxed{\text{⑤}}$ に当てはまる式を、あとの **ア**～**ク**からそれぞれ１つ選んで、その符号を書きなさい。

・**図１**において、$e=$ $\boxed{\text{①}}$ である。

・また、**図２**において、e の値は次のように求めることもできる。

$\boxed{\text{②}}=\boxed{\text{③}}=\boxed{\text{④}}=\boxed{\text{⑤}}=\boxed{\text{⑥}}$

であることと、

$(\boxed{\text{②}})+(\boxed{\text{③}})+(\boxed{\text{④}})+(\boxed{\text{⑤}})=(\boxed{\text{⑦}})+3e$

であることより、

$4\times\boxed{\text{⑥}}=45+3e$

が成り立つ。よって、$e=$ $\boxed{\text{①}}$

図１

2		4
7	e	

図２

a	b	c
d	e	f
g	h	i

ア　$a+b+c$　　**イ**　$d+e+f$　　**ウ**　$g+h+i$　　**エ**　$a+d+g$　　**オ**　$b+e+h$
カ　$c+f+i$　　**キ**　$a+e+i$　　**ク**　$c+e+g$

(6)　n を自然数とするとき、$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\,d\theta$ について、次の問いに答えなさい。

①　I_1、I_2 の値を求めなさい。

②　$n\geqq3$ のとき、I_n を I_{n-2} と n を用いて表しなさい。

（解答はすべて、解答用紙に記入すること）

Ⅱ　Oを原点とする座標平面上に、放物線 $C: y=-3x^2+3x$ と直線 $\ell: y=3kx$ があるとき、次の問いに答えなさい。ただし、k は $0<k<1$ の定数とする。

⑴　放物線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めなさい。ただし、解答は答えのみでよい。

⑵　放物線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。S_1 を k を用いて表しなさい。

⑶　⑵のとき、放物線 C と直線 ℓ の交点のうち、点Oと異なる交点を通り y 軸に平行な直線を m とする。さらに、直線 m より右側にあり、放物線 C と直線 m、および x 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とする。$S=S_1+S_2$ とするとき、S の最小値とそのときの k の値を求めなさい。

Ⅲ　x の多項式 $P(x)=x^3+(2-k)x^2+(3-k)x+2k+6$ がある。ただし、k は実数の定数である。このとき、次の問いに答えなさい。

⑴　$P(-2)$ を求めなさい。ただし、解答は答えのみでよい。

⑵　方程式 $P(x)=0$ が異なる２つの虚数解をもつような定数 k の値の範囲を求めなさい。

⑶　方程式 $P(x)=0$ が虚数解 α、β をもち、$\alpha^2+\beta^2+5\alpha\beta=7$ が成り立つとき、

　ア　定数 k の値を求めなさい。

　イ　$\alpha^8-\beta^6+2\alpha$ の値を求めなさい。

Ⅳ　１辺の長さが３の正四面体OABCの辺OAを２：１に内分する点をD、辺ABを $(1-x):x$ に内分する点をE、辺BCを１：２に内分する点をFとし、点D、E、Fを通る平面と直線OCの交点をGとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき、次の問いに答えなさい。ただし、$0<x<1$ とする。

⑴　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めなさい。ただし、解答は答えのみでよい。

⑵　$\overrightarrow{DF}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ を用いて表しなさい。ただし、解答は答えのみでよい。

⑶　s、t は実数とする。$\overrightarrow{DG}=s\overrightarrow{DE}+t\overrightarrow{DF}$ と表されることを利用し、$\overrightarrow{OG}$ を x、$\vec{c}$ を用いて表しなさい。

⑷　辺DEと辺GFが平行であるとき、x の値を求めなさい。また、DE：GFを求めなさい。

⑸　⑷のとき、四角形DEFGの面積を求めなさい。

受験番号

令７　中学校・高等学校数学解答用紙（５枚のうち３）

総計

数学

I	(1)	①		②		③						
	(2)	①		②								
	(3)											
	(4)											
	(5)	①		②		③		④		⑤		⑥
		⑦										
	(6)	①	$I_1 =$	$I_2 =$	②	$I_n =$						
II	(1)											
	(2)											
	(3)											

I

II

数学 4/5

受験番号

令７　中学校・高等学校数学解答用紙（５枚のうち４）

数学

Ⅲ	(1)		
	(2)		
	(3)	ア	
		イ	

Ⅲ		

数学 5/5
受験番号

令７　中学校・高等学校数学解答用紙（５枚のうち５）

数学

Ⅳ	(1)		(2)	
	(3)			
	(4)			
	(5)			

Ⅳ		

受験番号

令７　中学校・高等学校数学模範解答（５枚のうち３）

総計 200

数学

Ⅰ	(1)	① イ　② エ　③ オ
	(2)	① 7　② 8
	(3)	$2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$
	(4)	$y=\frac{1}{3}x$
	(5)	① 5　② イ　③ オ　④ キ　⑤ ク　⑥ 15
		⑦ $a+b+c+d+e+f+g+h+i$
	(6)	① $I_1=$ 1　$I_2=\frac{\pi}{4}$　② $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

Ⅰ 60

Ⅱ	(1)	$\frac{1}{2}$

(2)

C と ℓ の交点の x 座標は

$-3x^2+3x=3kx$ より

$x^2-(1-k)x=0$

$x\{x-(1-k)\}=0$ であるから　$x=0,\ 1-k$

よって、

$$S_1=\int_0^{1-k}\{(-3x^2+3x)-3kx\}\,dx=-3\int_0^{1-k}x\{x-(1-k)\}\,dx$$
$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{(1-k)-0\}^3$$
$$=\frac{1}{2}(1-k)^3$$

(3)

$$S_2=\frac{1}{2}-\int_0^{1-k}(-3x^2+3x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}-\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{1-k}$$
$$=\frac{1}{2}-\left\{-(1-k)^3+\frac{3}{2}(1-k)^2\right\}$$
$$=-k^3+\frac{3}{2}k^2$$

$$S=S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}(1-3k+3k^2-k^3)-k^3+\frac{3}{2}k^2$$
$$=-\frac{3}{2}k^3+3k^2-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}$$

$$S'=-\frac{9}{2}k^2+6k-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(3k^2-4k+1)$$
$$=-\frac{3}{2}(3k-1)(k-1)$$

$S'=0$ とすると $k=\frac{1}{3},\ 1$

k	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	$\frac{5}{18}$	↗	

増減表より、$k=\frac{1}{3}$ のとき、最小値 $\frac{5}{18}$ をとる。

Ⅱ 40

令７　中学校・高等学校数学模範解答（５枚のうち４）

Ⅲ	(1)		0
	(2)		(1)より、$P(x)$ は $x+2$ で割り切れ、商は $x^2-kx+k+3$ であるから $P(x)=(x+2)(x^2-kx+k+3)$ となり $(x+2)(x^2-kx+k+3)=0$ ゆえに、$x=-2$ または $x^2-kx+k+3=0$ ……① したがって、方程式 $P(x)=0$ が異なる２つの虚数解をもつとき、２次方程式①が 異なる２つの虚数解をもつ。２次方程式①の判別式を D とすると、$D<0$ である。 よって、$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot(k+3)<0$ $k^2-4k-12<0$ $(k+2)(k-6)<0$ したがって、$-2<k<6$
	(3)	ア	虚数解 α、β は２次方程式①の解であるから、解と係数の関係より、 $\alpha+\beta=k,\ \ \alpha\beta=k+3$ したがって　$\alpha^2+\beta^2+5\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2+3\alpha\beta$ $=k^2+3(k+3)$ $=k^2+3k+9$ よって　$k^2+3k+9=7$ $k^2+3k+2=0$ $(k+2)(k+1)=0$ より $k=-2,\ -1$ (2)より　$-2<k<6$ であるから　$k=-1$
		イ	アより２次方程式①は　$x^2+x+2=0$ ……② 虚数解 α は２次方程式②の解であるから、$\alpha^2+\alpha+2=0$ より $\alpha^2=-\alpha-2$ $\alpha^4=(\alpha^2)^2=(-\alpha-2)^2=\alpha^2+4\alpha+4=-\alpha-2+4\alpha+4=3\alpha+2$ $\alpha^8=(\alpha^4)^2=(3\alpha+2)^2=9\alpha^2+12\alpha+4=9(-\alpha-2)+12\alpha+4=3\alpha-14$ 同様にして、$\beta^6=\beta^4\beta^2=(3\beta+2)(-\beta-2)=-3\beta^2-8\beta-4$ $=-3(-\beta-2)-8\beta-4=-5\beta+2$ よって、$\alpha^8-\beta^6+2\alpha=3\alpha-14-(-5\beta+2)+2\alpha=5(\alpha+\beta)-16$ $=5\cdot(-1)-16=-21$

Ⅲ	50

令７　中学校・高等学校数学模範解答（５枚のうち５）

Ⅳ

(1)	$\dfrac{9}{2}$	(2)	$-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(3)

$\overrightarrow{OE}=x\vec{a}+(1-x)\vec{b}$

よって

$\overrightarrow{DE}=\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\vec{a}+(1-x)\vec{b}$

$\overrightarrow{DG}=s\overrightarrow{DE}+t\overrightarrow{DF}$

$=s\left\{\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\vec{a}+(1-x)\vec{b}\right\}+t\left(-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}$

$=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\overrightarrow{DG}$

$=\left(sx-\dfrac{2}{3}s-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{2}{3}\right)\vec{a}+\left(s-sx+\dfrac{2}{3}t\right)\vec{b}+\dfrac{1}{3}t\vec{c}$

G は OC 上の点であるから

$sx-\dfrac{2}{3}s-\dfrac{2}{3}t+\dfrac{2}{3}=0$　　……①

$s-sx+\dfrac{2}{3}t=0$　　……②

①＋②より　$\dfrac{1}{3}s+\dfrac{2}{3}=0$　よって　$s=-2$

②より　$-2(1-x)+\dfrac{2}{3}t=0$　よって　$t=3(1-x)$

したがって　$\overrightarrow{OG}=(1-x)\vec{c}$

(4)

(3)より　$\overrightarrow{DE}=\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\vec{a}+(1-x)\vec{b}$　……③

$\overrightarrow{GF}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}-(1-x)\vec{c}$

$=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\vec{c}$

DE と GF が平行であるから

$\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{GF}$（$k$ は実数）

$=\dfrac{2}{3}k\vec{b}+k\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\vec{c}$　……④

４点 O、A、B、C は同じ平面上にないから、$\overrightarrow{DE}$ の $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いた表し方はただ１通りである。

③、④から　$x-\dfrac{2}{3}=0$　かつ　$1-x=\dfrac{2}{3}k$　かつ　$k\left(x-\dfrac{2}{3}\right)=0$

したがって　$x=\dfrac{2}{3}$,　$k=\dfrac{1}{2}$

よって DE：GF＝1：2

(5)

(4)のとき　$\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{DG}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(1)より　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{9}{2}$

$|\overrightarrow{DE}|=\dfrac{1}{3}\cdot 3=1$

$|\overrightarrow{DG}|^2=\dfrac{4}{9}|\vec{a}|^2-\dfrac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{c}+\dfrac{1}{9}|\vec{c}|^2$

$=4-2+1=3$

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG}=-\dfrac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

よって　$\triangle DEG=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{DE}|^2\cdot|\overrightarrow{DG}|^2-(\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DG})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{1\cdot 3-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{11}}{4}$

したがって　四角形 DEFG の面積は　$\dfrac{\sqrt{11}}{4}\cdot 3=\dfrac{3\sqrt{11}}{4}$

Ⅳ	50	