

検査IV 数 学

解答上の注意 解答は、全て解答用紙に記入すること。
ただし、1は答えのみでよい。

1 次の問いに答えなさい。

(1) $x^4 + x^2 + 1$ を因数分解しなさい。

(2) 男子2人、女子8人が円卓のまわりへ等間隔に座るとき、男子が向かい合う確率を求めなさい。

(3) 不等式 $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 16 < 0$ を満たす x の値の範囲を求めなさい。

(4) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を $a_n = 4n + 3$, $b_n = 6n - 13$ とする。数列 $\{b_n\}$ の項のうち、数列 $\{a_n\}$ の項でもあるものを小さい方から並べて数列 $\{c_n\}$ を作るとき、数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めなさい。

(5) 点 O を原点とする座標空間に、2点 $A(2, 3, 1)$, $B(-2, 1, 3)$ をとる。また、 x 座標が正である点 C を、 \overrightarrow{OC} が \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} に垂直で、 $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{3}$ となるように定める。このとき、点 C の座標を求めなさい。

(6) α, β を複素数とする。 $|\alpha| = |\beta| = |\alpha - \beta| = 2$ のとき、 $|\alpha + \beta|$ の値を求めなさい。

(7) 曲線 $y = \log x$ の接線で、傾きが e であるものの方程式を求めなさい。

2 $\sin 18^\circ$ の値を求めなさい。

3 円に内接する四角形 $ABCD$ において、 $AB = 6$, $BC = 4$, $CD = 4$, $DA = 8$ とし、対角線 AC と対角線 BD の交点を E とするとき、次の問いに答えなさい。

(1) AC の長さを求めなさい。

(2) EC の長さを求めなさい。

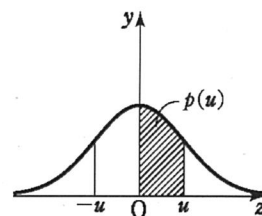
(3) $\triangle BCE$ の面積 S を求めなさい。

検査Ⅳ 数 学

- 4 NAGANOKENの9個の文字すべてを1列に並べるとき、次の問いに答えなさい。
- (1) 並べ方は全部で何通りあるか求めなさい。
 - (2) どの3つのNも隣り合わない並べ方は何通りあるか求めなさい。
 - (3) どの3つのNも隣り合わず、かつ2つのAが隣り合わない並べ方は何通りあるか求めなさい。
- 5 有権者が10万人である市の市長選挙で、A、Bの2人が立候補した。投票日の出口調査で400人に投票先を尋ねたところ、Aに投票したと回答した人が216人であった。白票、無効票がなく、有権者10万人が全員投票したと仮定して、この選挙においてAの方が得票率が高いと判断してよいか。有意水準5%で検定しなさい。必要に応じて、3ページの正規分布表を用いてもよい。
- 6 半径1の球に側面と底面で外接する直円錐Pについて、次の問いに答えなさい。
- (1) Pの高さを x 、底面の半径を r とすると、 r を x を用いて表しなさい。
 - (2) Pの体積が最小となる時、底面の半径を求めなさい。
- 7 媒介変数 t によって、 $x = 2 \cos t - \cos 2t$, $y = 2 \sin t - \sin 2t$ ($0 \leq t \leq \pi$)と表される曲線Cについて、次の問いに答えなさい。
- (1) $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ を求めなさい。
 - (2) Cの長さを求めなさい。

检查IV 数 学

正規分布表



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

記号	数	番号	
----	---	----	--

検査IV 数学解答例

1 【各5点 計35点】

(1)	$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$	(2)	$\frac{1}{9}$
(3)	$x < 3$	(4)	$c_n = 12n - 1$
(5)	$(1, -1, 1)$	(6)	$2\sqrt{3}$
(7)	$y = ex - 2$		

2 【8点】

$\theta = 18^\circ$ とすると, $5\theta = 90^\circ$ であるから, $2\theta = 90^\circ - 3\theta$

$$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta)$$

$$\sin 2\theta = \cos 3\theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$\cos \theta \neq 0$ であるから,

$$2 \sin \theta = 4 \cos^2 \theta - 3$$

$$2 \sin \theta = 4(1 - \sin^2 \theta) - 3$$

$$4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$\sin \theta > 0$ より $\sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

すなわち $\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

記号	数	番号	
----	----------	----	--

検査IV 数学解答例

3 【各6点 計18点】

(1) $\angle ABC = \theta$ とおくと,

円に内接する四角形の性質より, $\angle ADC = 180^\circ - \theta$

$\triangle ABC$ において, 余弦定理より,

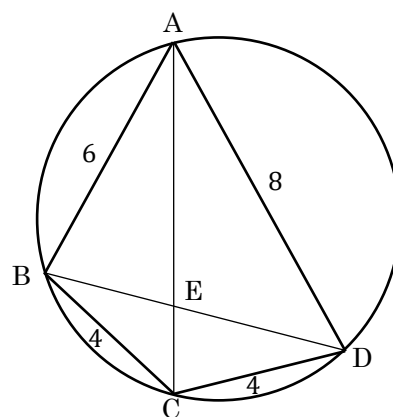
$$\begin{aligned} AC^2 &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos \theta \\ &= 52 - 48 \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\triangle ADC$ において, 余弦定理より,

$$\begin{aligned} AC^2 &= 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 80 + 64 \cos \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \quad \cos \theta = -\frac{1}{4}$$

また, $\textcircled{1}$ より $AC > 0$ であるから $AC = 8$



(2) $AE : EC = \triangle ABD : \triangle CBD$

$\angle BAD = \alpha$ とおくと, 円に内接する四角形の性質より, $\angle BCD = 180^\circ - \alpha$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin \alpha = 24 \sin \alpha \quad \triangle CBD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = 8 \sin \alpha$$

よって, $\triangle ABD : \triangle CBD = 24 \sin \alpha : 8 \sin \alpha = 3 : 1$

すなわち $AE : EC = 3 : 1$

$$\text{したがって,} \quad EC = \frac{1}{4} AC = 2$$

(3) (1) から $\cos \theta = -\frac{1}{4}$ なので $\sin \theta > 0$ より, $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$$

$\triangle ABC : \triangle BCE = AC : EC = 4 : 1$ であるから,

$$S = \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

記号	数	番号	
----	----------	----	--

検査IV 数学解答例

4 【(1) 5点 (2) 6点 (3) 7点 計18点】

(1) 9個の文字のうち、Nが3個、Aが2個同じだから、

$$\text{求める順列の総数は } \frac{9!}{3!2!} = 30240 \text{ 通り}$$

(2) N以外の6文字の並べ方は $\frac{6!}{2!} = 360$ 通り

並べた文字列の両端および文字間の7ヶ所から、

N3個を入れる場所の選び方は ${}^7C_3 = 35$ 通り

よって、求める場合の数は $360 \times 35 = 12600$ 通り

(3) どの3つのNも隣り合わず、かつ2つのAが隣り合う並べ方……①の総数を求める。

隣り合うAAをまとめてA'で表すと、

A', G, O, K, Eの5文字の並べ方は $5! = 120$ 通り

並べた文字列の両端および文字間の6ヶ所から、

N3個を入れる場所の選び方は ${}^6C_3 = 20$ 通り

よって、①の総数は $120 \times 20 = 2400$ 通り

したがって、求める場合の数は、(2)の結果を用いて

$$12600 - 2400 = 10200 \text{ 通り}$$

5 【10点】

Aの得票率を p とする。

Aの方が得票率が高ければ $p > 0.5$ であるから、帰無仮説として $p = 0.5$ を立てる。

この仮説が正しいとすると、400人のうちAに投票する人の人数 X は、

二項分布 $B(400, 0.5)$ に従う。 X の期待値を m 、標準偏差を σ とすると、

$$m = 400 \times 0.5 = 200, \quad \sigma = \sqrt{400 \times 0.5 \times (1 - 0.5)} = 10$$

よって、 $Z = \frac{X - 200}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

正規分布表より $P(0 \leq Z \leq 1.64) \approx 0.45$ であるから、有意水準5%の棄却域は $Z \geq 1.64$

$X = 216$ のとき $Z = \frac{216 - 200}{10} = 1.6$ であり、この値は棄却域に入らないから、

仮説を棄却できない。よって、Aの方が得票率が高いとは判断できない。

記号	数	番号	
----	----------	----	--

検査IV 数学解答例

6 【(1) 7点 (2) 8点 計15点】

(1) 球の中心を O とし、直円錐をその頂点と底面の円の中心を通る平面で切り取ったとき、切り口の三角形 ABC 、および円と $\triangle ABC$ との接点 D 、 E を右図のように定める。

直円錐の高さは、球の直径より大きいので、 $x > 2$ である。

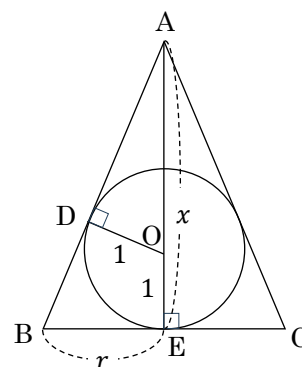
$\triangle AOD$ において、 $\angle ADO = 90^\circ$ だから

$$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{(x-1)^2 - 1^2} = \sqrt{x^2 - 2x}$$

$\triangle ABE$ の $\triangle AOD$ であるから、 $BE : OD = AE : AD$

すなわち $r : 1 = x : \sqrt{x^2 - 2x}$

$$x > 2 \text{ であるから } r = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$



(2) 直円錐の体積を V とすると、(1) の結果を用いて

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}} \right)^2 \cdot x = \frac{\pi x^2}{3(x-2)}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2x \cdot (x-2) - x^2 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \text{ とすると、} x > 2 \text{ であるから } x = 4$$

増減表より、 $x = 4$ のとき、 V は最小となる。

このとき、(1) から $r = \sqrt{2}$ である。

よって、求める直円錐の底面の半径は $\sqrt{2}$

x	2	...	4	...
$\frac{dV}{dx}$	/	-	0	+
V	/	↘	極小	↗

記号	数	番号	
----	----------	----	--

検査IV 数学解答例

7 【(1) 6点 (2) 10点 計16点】

$$(1) \frac{dx}{dt} = -2 \sin t + 2 \sin 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cos t - 2 \cos 2t$$

$$\begin{aligned}
 (2) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 4(\sin^2 t - 2 \sin t \sin 2t + \sin^2 2t) + 4(\cos^2 t - 2 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t) \\
 &= 4\{2 - 2(\cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t)\} \\
 &= 8(1 - \cos t) \\
 &= 16 \sin^2 \frac{t}{2}
 \end{aligned}$$

$$0 \leq t \leq \pi \text{ より, } 0 \leq \frac{t}{2} \leq \frac{\pi}{2} \text{ であるから } \sin \frac{t}{2} \geq 0$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{16 \sin^2 \frac{t}{2}} = 4 \sin \frac{t}{2}$$

よって, C の長さは

$$\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^\pi 4 \sin \frac{t}{2} dt = 4 \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 8$$