（解答上の注意）解答は，すべて解答用紙に記入すること。
ただし，1は答えのみでよい。

1　次の問いに答えなさい。

（1）次の文章は，「高等学校学習指導要領（平成30年告示）」の　第4節　数学　第3款　各科目にわたる指導計画の作成と内容の取扱いの一部である。①から③に当てはまる語句を，以下のア～ケから選び，記号を書きなさい。

> 3　各科目の指導に当たっては，数学を学習する意義などを実感できるよう工夫するとともに，次のような数学的活動に取り組むものとする。
> (1) $\boxed{\text{①}}$の事象や社会の事象などを数理的に捉え，数学的に表現・処理して問題を解決し，解決の$\boxed{\text{②}}$や結果を振り返って考察する活動。
> (2) 数学の事象から自ら問題を見いだし解決して，解決の$\boxed{\text{②}}$や結果を振り返って$\boxed{\text{③}}$的・発展的に考察する活動。
> (3) 自らの考えを数学的に表現して説明したり，議論したりする活動。

ア　統合　　イ　手法　　ウ　過程　　エ　探究　　オ　日常
カ　手順　　キ　複合　　ク　生活　　ケ　身のまわり

（2）6つの数 1，$a$，3，$a+2$，7，$-2a-1$ の分散 $v$ が最小となる $a$ の値，およびそのときの分散 $v$ を求めなさい。

（3）関数 $f(x)=\log(2x+1)$ を $x$ で微分しなさい。

（4）四角形ABCD は円に内接し，AB＝DA＝$2\sqrt{37}$，BC＝6，∠BAD＝60° である。このとき，△ABC と△ACD の面積比を求めなさい。

（5）確率変数 $X$ の期待値は 4，標準偏差は 3 とする。$Y=aX+b$ で表される確率変数 $Y$ について，期待値は 0，標準偏差は 1 となった。定数 $a$，$b$ の値を求めなさい。ただし，$a>0$ とする。

（6）次の 4 つの値の大小を不等号を用いて表しなさい。

$\cos 1$，$\cos 2$，$\cos 3$，$\cos 4$

（7）$z=2+4i$ とする。複素数平面上で，点 $z$ を原点を中心として $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数 $w$ を求めなさい。

2　長さ1と$a$の線分が与えられたとき，$\sqrt{a}$（$a>0$）を長さとする線分を，林さんは次のような［手順］で作図した。

［手順］
①長さ$a+1$の線分AB上に，AC$=a$，CB$=1$となる点Cをとる。
②ABを直径とする円Oをかく。
③点Cを通り線分ABに垂直な直線をかき，円Oとの交点の１つをPとする。
　このとき，CP$=\sqrt{a}$となる。

CP$=\sqrt{a}$となることを証明しなさい。

3　$x$についての2次不等式$x^2-14x+40<0$，$(x+3)(x-a^2+3a)<0$が同時に成り立つ$x$が存在しないとき，定数$a$の値の範囲を求めなさい。

4　正四面体OABCにおいて，OA⊥BCであることを証明しなさい。

5　$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}$のとき，次の値を求めなさい。

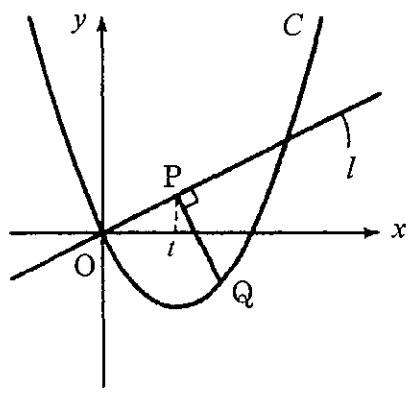
（1）$\sin\alpha\sin\beta$
（2）$\cos^2\alpha+\cos^2\beta$

6　$y=2x^2-6x$で表される放物線を$C$とする。$C$上の点で，$x$座標が$n$（$n$は自然数）である点をPとし，$C$と線分OPで囲まれる図形を$D$とする。ただし，$D$は境界線上の点を含むとする。

$D$に含まれる格子点の総数を$n$を用いて表しなさい。ただし，$x$座標，$y$座標がともに整数である点を格子点という。

7　放物線$C$：$y=x^2-2x$と直線$l$：$y=\frac{1}{2}x$で囲まれた部分を，$l$のまわりに1回転してできる回転体$D$の体積を求める。次の各問いに答えなさい。

（1）右の図のように，$l$上に点$\mathrm{P}\left(t, \frac{t}{2}\right)$（$t>0$）をとり，点Pを通り，$l$に垂直な直線と$C$との交点をQとする。点Qの座標を$t$を用いて表しなさい。ただし，点Qの$x$座標は正とする。




（2）点Pを通り，$l$に垂直な平面で$D$を切ったときの断面積$S$を$t$の式で表しなさい。
（3）$D$の体積$V$を求めなさい。

| 記号 | 数 | 番号 | |
|---|---|---|---|

# 検査Ⅳ　　数学解答用紙

1　【(1)①～③:各3点, (2)6点, (3)～(7):各5点　計40点】

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | ① オ | ② ウ | ③ ア |
| (2) | $a=-\frac{2}{3}$ , $v=\frac{56}{9}$ | (3) | $f'(x)=\frac{2}{2x+1}$ |
| (4) | 3 : 4 | (5) | $a=\frac{1}{3}$ , $b=-\frac{4}{3}$ |
| (6) | $\cos 3<\cos 4<\cos 2<\cos 1$ | | |
| (7) | $w=(\sqrt{3}-2)+(2\sqrt{3}+1)i$ | | |

2　【10点】

△ACPと△PCBについて

∠ACP＝∠PCB＝90°

∠APC＝90°　－∠CPB＝∠PBC

したがって　△ACP∽△PCBである。

ゆえに　AC : CP＝CP : CB

すなわち　$CP^2=AC\cdot CB=a\cdot 1=a$

CP＞0なので

よって　$CP=\sqrt{a}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 記号 | 数 | 番号 | |

# 検査Ⅳ　数学解答用紙

3 【10 点】

$x^2-14x+40<0$・・・①　について

$(x-4)(x-10)<0$ より $4<x<10$

$(x+3)(x-a^2+3a)<0$・・・②　について

$(x+3)(x-a^2+3a)=0$ とすると，$x=-3$，$a^2-3a$

$a^2-3a-(-3)=a^2-3a+3=\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$　より

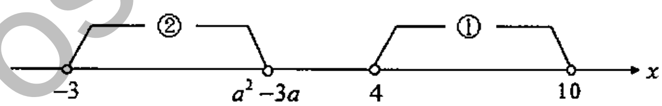
すべての実数 $a$ において $a^2-3a+3>0$　ゆえに　$a^2-3a>-3$

よって②の解は　$-3<x<a^2-3a$

題意より　$a^2-3a\leqq 4$

$a^2-3a-4\leqq 0$

$(a-4)(a+1)\leqq 0$




よって　$-1\leqq a\leqq 4$

4 【10 点】

正四面体の各面は正三角形だから，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cos 60^\circ-|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos 60^\circ$

また，　$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$

よって，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{OA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ より，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$

したがって，

OA⊥BC

| 記号 | 数 | 番号 | |
|---|---|---|---|

検査Ⅳ　数学解答用紙

5 【(1):5点, (2):7点 計12点】

（1）

$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{4}$ より， $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{4}$ ・・・①

$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{4}$ より， $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{4}$ ・・・②

②－①より， $2\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}$

したがって， $\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{4}$

（2）

（1）より，

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta=\frac{1}{16}$$

$$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=\frac{1}{16}$$

$$1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\frac{1}{16}$$

また，①＋②より，

$$2\cos\alpha\cos\beta=1$$

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\frac{1}{4}$$

したがって，

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{19}{16}$$

| 記号 | 数 | 番号 | |
|---|---|---|---|

検査Ⅳ　　**数学解答用紙**

6　【16点】

$0 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 $k$ に対して，

直線 $x=k$ 上にあり $D$ に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする。

P $\left(n, 2n^2-6n\right)$ より，直線 OP の方程式は、 $y=\left(2n-6\right)x$

したがって，

$$f(k)=\left(2n-6\right)k-(2k^2-6k)+1=-2k^2+2nk+1$$

ゆえに，求める格子点の総数は，

$$\sum_{k=0}^{n} f(k)=\sum_{k=0}^{n}\left(-2k^2+2nk+1\right)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}\left(-2k^2+2nk+1\right)=1-2\sum_{k=1}^{n}k^2+2n\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=1-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)(n^2-n+3)$$

7　【(1):6点，(2):6点，(3):10 点　計22点】

(1)

直線 PQ の方程式は，点 P を通り直線 $l$ に垂直なので， $y=-2x+\frac{5}{2}t$

この直線と放物線 $y=x^2-2x$ の交点は

$y=-2x+\frac{5}{2}t$ ・・・①　， $y=x^2-2x$ ・・・②　より　$x^2=\frac{5}{2}t$

$x>0$ より　$x=\frac{\sqrt{10t}}{2}$

①より　$y=\frac{5}{2}t-\sqrt{10t}$

よって　求める座標は，Q$\left(\frac{\sqrt{10t}}{2},\ \frac{5}{2}t-\sqrt{10t}\right)$

| 記号 | 数 | 番号 | |
|---|---|---|---|



検査Ⅳ　　**数学解答用紙**

7

（２）

$S=\pi \mathrm{PQ}^2$

ここで $\mathrm{PQ}^2=\left(\dfrac{\sqrt{10t}}{2}-t\right)^2+\left\{\left(\dfrac{5}{2}t-\sqrt{10t}\right)-\dfrac{1}{2}t\right\}^2$

$$=\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2+4\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2=5\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2$$

よって $S=5\pi\left(t-\dfrac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2$

（３）

C と $l$ の交点を O，R とする。

$\mathrm{R}\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{4}\right)$であるから，$\mathrm{OR}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{4}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{5}}{4}$

ここで，$\mathrm{OP}=u$ とおくと

$u=\sqrt{t^2+\left(\dfrac{1}{2}t\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}t$　より $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

| $u$ | $0\to\frac{5\sqrt{5}}{4}$ |
|---|---|
| $t$ | $0\to\frac{5}{2}$ |

求める体積 $V$ は，

$$V=\int_0^{\frac{5\sqrt{5}}{4}}S\,du$$

$$=5\pi\int_0^{\frac{5\sqrt{5}}{4}}\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2du$$

$$=5\pi\int_0^{\frac{5}{2}}\left(t-\frac{\sqrt{10t}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{5}}{2}dt$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^{\frac{5}{2}}\left(t^2-\sqrt{10}t^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{2}t\right)dt$$

$$=\frac{5\sqrt{5}}{2}\pi\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{2\sqrt{10}}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{4}t^2\right]_0^{\frac{5}{2}}=\frac{125\sqrt{5}}{96}\pi$$