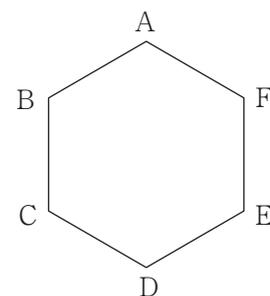


令5 中学校・高等学校数学 (5枚のうち1)

(解答はすべて、解答用紙に記入すること)

I 次の各問いに答えなさい。解答は、答えのみでよい。

- (1) 2023 と 1003 の最大公約数を求めなさい。
- (2) 10 個の正方形があり、1 辺の長さの平均値は 6 cm、分散は 4 である。この 10 個の正方形について、面積の平均値を求めなさい。
- (3) 座標平面において、点 (1, 1) を中心とし、直線 $l: 2x - y - 11 = 0$ に接する円を C とするとき、次の問いに答えなさい。
- ① 円 C の方程式を求めなさい。
- ② 円 C と直線 l の接点の座標を求めなさい。
- (4) 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF について、内積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ を求めなさい。



(5) 次の極限值を求めなさい。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

(6) 紙の大きさを表す A 判と B 判は次のように定められている。あとの 、 に当てはまる値を、四捨五入して整数で答えなさい。ただし、 $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$ 、 $1.732 < \sqrt{3} < 1.733$ 、 $2.449 < \sqrt{6} < 2.450$ である。

A 判 隣り合う辺の長さの比が $1 : \sqrt{2}$ で、面積が 1m^2 の長方形の紙の大きさを A 0 判といい、長い辺が半分になるように次々と半分に切っていく、できたものを A 1 判、A 2 判、A 3 判、…… という。

B 判 隣り合う辺の長さの比が $1 : \sqrt{2}$ で、面積が 1.5m^2 の長方形の紙の大きさを B 0 判といい、長い辺が半分になるように次々と半分に切っていく、できたものを B 1 判、B 2 判、B 3 判、…… という。

A 0

B 0

コピー機で A 5 判の紙全体を A 4 判の大きさに拡大しようと思い、倍率を 200% に設定して複写したところ、A 4 判ではなく、A 3 判の大きさに拡大されてしまった。A 5 判の紙全体を A 4 判の大きさに正しく拡大するためには、倍率を % に設定する必要があった。また、B 4 判の紙全体を A 4 判の大きさに正しく縮小するためには、倍率を % に設定すればよい。

令5 中学校・高等学校数学 (5枚のうち2)

(解答はすべて、解答用紙に記入すること)

II 地震の規模を表すマグニチュード M は、地震が発するエネルギー E (単位はジュール) を使って、一般的に次の式で定義される。

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

このとき、あとの問いに答えなさい。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ 、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

- (1) マグニチュード5の地震のエネルギーは、マグニチュード3の地震のエネルギーの何倍であるか求めなさい。解答は、答えのみでよい。
- (2) マグニチュードが1増えると、地震のエネルギーはおよそ何倍になるか。次のア～カから最も近いものを1つ選んで、その符号を書きなさい。解答は、答えのみでよい。
ア 1.5倍 イ 3.2倍 ウ 15倍 エ 32倍 オ 150倍 カ 320倍
- (3) 1995年兵庫県南部地震のマグニチュードは7.3であった。2010年チリ地震のエネルギーが兵庫県南部地震のエネルギーの180倍であるとすると、チリ地震のマグニチュードを求めなさい。ただし、四捨五入して小数第1位まで求めること。

III 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 2a_n - 2^n$ で表されるとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 初項 a_1 を求めなさい。また、 a_{n+1} を a_n の式で表しなさい。
- (2) 一般項 a_n を求めなさい。
- (3) $T_n = S_{n+1} - 2S_n$ とするとき、 $T_1 \times T_5 \times T_9 \times \cdots \times T_{4n-3}$ を求めなさい。

IV 2つの関数 $f(x) = x^3 - 2x^2$ 、 $g(x) = 2x^2 + ax + b$ について、次の問いに答えなさい。ただし、 a 、 b は定数とする。

- (1) 関数 $f(x)$ の極値を求めなさい。
- (2) 2つの曲線 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ は、 x 座標が p ($0 < p < 2$) である共有点 P をもち、点 P において共通の接線をもつ。さらに、曲線 $y = g(x)$ が点 $(2, 0)$ を通るとき、 a 、 b の値を求めなさい。
- (3) a 、 b は(2)で求めた値とする。2つの曲線 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

令5 中学校・高等学校数学解答用紙 (5枚のうち3)

総計		

I	(1)				
	(2)	cm ²			
	(3)	①		②	
	(4)				
	(5)				
	(6)	①		②	
II	(1)	倍			
	(2)				
	(3)				

I		

II		

令5 中学校・高等学校数学解答用紙 (5枚のうち4)

III	(1)	
	(2)	
	(3)	

III		

令5 中学校・高等学校数学解答用紙 (5枚のうち5)

IV	(1)	
	(2)	
	(3)	

令 5 中学校・高等学校数学 模範解答

総計
200

I	(1)	17			
	(2)	40	cm ²		
	(3)	①	$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 20$	②	(5, -1)
	(4)	3			
	(5)	2			
	(6)	①	141	②	82

I
60

II	(1)	1000 倍
	(2)	エ
	(3)	<p>兵庫県南部地震のエネルギーを E、チリ地震のマグニチュードを M とすると、</p> <p>兵庫県南部地震について、$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 7.3 \quad \dots\dots ①$</p> <p>チリ地震について、$\log_{10} 180 E = 4.8 + 1.5 M \quad \dots\dots ②$</p> <p>②-①より、$\log_{10} 180 E - \log_{10} E = 1.5(M - 7.3)$</p> $\log_{10} \frac{180E}{E} = 1.5M - 10.95$ $\log_{10} 180 = 1.5M - 10.95$ $\log_{10}(10 \times 2 \times 3^2) = 1.5M - 10.95$ $1 + \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 = 1.5M - 10.95$ $1 + 0.3010 + 2 \times 0.4771 = 1.5M - 10.95$ $1.5M = 13.2052$ $M = 8.80 \dots\dots$ <p>小数第 2 位を四捨五入して、求めるマグニチュードは 8.8</p>

II
40

令 5 中学校・高等学校数学 模範解答

		<p>$a_1 = S_1 = 2a_1 - 2^1$ より $a_1 = 2$</p> <p>また, $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2^{n+1} - (2a_n - 2^n)$</p> <p style="text-align: center;">(1) $= 2a_{n+1} - 2a_n - 2^n(2 - 1) = 2a_{n+1} - 2a_n - 2^n$</p> <p>よって, $a_{n+1} = 2a_n + 2^n \cdots \cdots \textcircled{1}$</p>
		<p>①の両辺を 2^{n+1} で割ると,</p> $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$ <p>$b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと,</p> $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$ <p style="text-align: center;">(2)</p> <p>ゆえに, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{a_1}{2} = 1$, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから,</p> $b_n = 1 + (n - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n + 1}{2}$ <p>よって, $a_n = 2^n b_n = (n + 1) \cdot 2^{n-1}$</p>
III		<p>$S_n = 2a_n - 2^n$ より $S_n = 2(n + 1) \cdot 2^{n-1} - 2^n$</p> $= n \cdot 2^n + 2^n - 2^n = n \cdot 2^n$ <p>$T_n = S_{n+1} - 2S_n$</p> $= (n + 1) \cdot 2^{n+1} - 2n \cdot 2^n$ $= 2^{n+1}$ <p style="text-align: center;">(3)</p> $T_1 \times T_5 \times T_9 \times \cdots \cdots \times T_{4n-3} = 2^2 \times 2^6 \times 2^{10} \times \cdots \cdots \times 2^{4n-2}$ $= 2^{2+6+10+\cdots+(4n-2)}$ <p>ここで,</p> $2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = \frac{1}{2} \cdot n \{2 + (4n - 2)\}$ $= 2n^2$ <p>より</p> $T_1 \times T_5 \times T_9 \times \cdots \cdots \times T_{4n-3} = 2^{2n^2} = 4^{n^2}$

令 5 中学校・高等学校数学 模範解答

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$= x(3x - 4)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } x = 0, \frac{4}{3}$$

(1)

x	…	0	…	4/3	…
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	0	↘	-32/27	↗

極大

極小

$$x = 0 \text{ のとき, 極大値 } 0, \quad x = \frac{4}{3} \text{ のとき, 極小値 } -\frac{32}{27}$$

点 P で共通の接線をもつための必要十分条件は,
 $f(p) = g(p)$ かつ $f'(p) = g'(p)$ が成り立つことである。
 $f(p) = g(p)$ から $p^3 - 2p^2 = 2p^2 + ap + b$ より

$$b = p^3 - 4p^2 - ap \quad \dots\dots ①$$

また $f'(x) = 3x^2 - 4x$, $g'(x) = 4x + a$ なので
 $f'(p) = g'(p)$ から $3p^2 - 4p = 4p + a$ より

$$a = 3p^2 - 8p \quad \dots\dots ②$$

②を①に代入して整理すると,
 $b = -2p^3 + 4p^2 \quad \dots\dots ③$

(2)

さらに, 曲線 $y = g(x)$ が, 点 $(2, 0)$ を通るので,

$$8 + 2a + b = 0$$

これに, ②, ③を代入し, 整理すると,

$$8 + 2(3p^2 - 8p) + (-2p^3 + 4p^2) = 0$$

$$p^3 - 5p^2 + 8p - 4 = 0$$

$$(p - 1)(p - 2)^2 = 0$$

$$0 < p < 2 \text{ より } p = 1$$

$$\text{②, ③に代入して, } a = -5, b = 2$$

(1), (2)から, 2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフをかくと図のようになる。
 区間 $1 \leq x \leq 2$ で $f(x) \leq g(x)$ であるから,

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_1^2 \{(2x^2 - 5x + 2) - (x^3 - 2x^2)\} dx \\ &= \int_1^2 (-x^3 + 4x^2 - 5x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

(3)

