検査V　　数　学

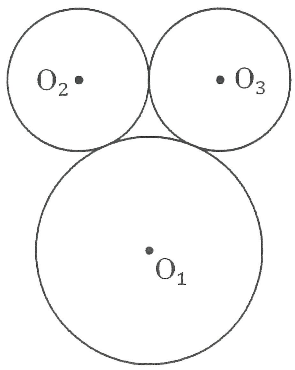
解答上の注意　解答は，全て**解答用紙**に記入すること。
ただし，１は答えのみでよい。

１　次の問いに答えなさい。

（１）３辺の長さが a，$a+2$，$a+3$ である三角形において，１つの内角が $120°$ であるとき，a の値を求めなさい。

（２）ある製品には，1000 個に１個の割合で不良品が含まれている。この製品の品質検査では，不良品が不良品であると判定される確率は 99 ％で，不良品でないものが誤って不良品であると判定される確率は 2％である。この品質検査で不良品であると判定された製品が不良品である確率を求めなさい。

（３）右の図のように，半径８の円 O_1 と半径５の２つの円 O_2，O_3 とが互いに２つずつ外接している。このとき，円 O_1，O_2，O_3 すべてに外接する円の半径を求めなさい。



（４）$x-3y-z=3$，$x+y+z=-5$ を満たす x，y，z のすべての値に対して，$ax^2+2by^2+cz^2=24$ が成り立つとき，a，b，c の値を求めなさい。

（５）等差数列 $\{a_n\}$ の初項が 3，初項から第 19 項までの平均が 30 である。このとき，初項から第 19 項までの 19 個の値からなるデータの分散を求めなさい。

（６）空間内の３点 A (2，3，1)，B (3，−1，2)，C (1，5，4) を頂点とする△ABC の面積を求めなさい。

（７）極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ を求めなさい。

検査Ⅴ　　数　　学

2　関数 $y=\sin x+3\cos x\ (0\leqq x<2\pi)$ について，次の問いに答えなさい。

（1） y の最小値を求めなさい。

（2） y が最小値をとるときの x の値を θ とするとき，$\cos 2\theta$ の値を求めなさい。

3　４人でじゃんけんを 100 回するとき，２人だけが勝つ回数を X とする。ただし，あいこの場合も１回のじゃんけんを行ったとする。X の期待値 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(X)$ を求めなさい。

4　方程式 $8^x+8^{-x}-4(4^x+4^{-x})+2(2^x+2^{-x})-4=0$ を解きなさい。

5　a を実数の定数とし，$f(x)=x^2-6x+11$，$g(x)=ax$ とする。２つの関数 $f(x)$，$g(x)$ の定義域を $2\leqq x\leqq 5$ とするとき，次の問いに答えなさい。

（1）ある x に対して，$f(x)\leqq g(x)$ が成り立つような a の値の範囲を求めなさい。

（2）ある x_1，x_2 に対して，$f(x_1)\leqq g(x_2)$ が成り立つような a の値の範囲を求めなさい。

6　座標平面上で，原点 O を中心とする半径１の円を A とし，点 P を A の円周上にある第１象限の点とする。P から y 軸へ下ろした垂線を PQ とし，中心が点 Q，半径 PQ の円を B とする。このとき，円 A とその内部または円 B とその内部からなる部分を y 軸の周りに１回転してできる回転体の体積を V とする。点 P の x 座標を r とするとき，V が最大となる r の値を求めなさい。

7　0 以上の整数 n に対して，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\ dx$$

と定める。

（1）$n\geqq 2$ のとき，$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ を示しなさい。

（2）$n\geqq 1$ のとき，nI_nI_{n-1} を求めなさい。

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ を示しなさい。

○　　　　　　　　　　　　　　　　　　　○

記号	数	番号	

○　　　　　　　　　　　　　　　　　　　○

検査Ⅴ　数学解答例

1　【(1)～(7):各5点　計 35 点】

(1)	$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$	(2)	$\dfrac{11}{233}$
(3)	$\dfrac{8}{9}$	(4)	$a=8,\ b=-6,\ c=1$
(5)	270	(6)	$3\sqrt{6}$
(7)	$\dfrac{1}{2}$		

2　【(1)(2):各6点　計 12 点】

（1）与えられた式を変形すると，

$$y=\sqrt{10}\sin(x+\alpha)$$

ただし，α は $\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ を満たす鋭角である。

$0\leqq x<2\pi$ より，$\alpha\leqq x+\alpha<2\pi+\alpha$ であるから，$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$

よって，$x+\alpha=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，最小値は $-\sqrt{10}$

（2）（1）より，y が最小となるとき，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi-\alpha$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta&=\cos(3\pi-2\alpha)\\&=-\cos 2\alpha\\&=-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

記号	数	番号	

検査Ｖ　**数学解答例**

3　【10 点】

1 回のじゃんけんで 2 人だけが勝つ確率は　${}_4\mathrm{C}_2\times3\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{2}{9}$　であるから，

X は二項分布 $B\left(100,\ \frac{2}{9}\right)$ に従う確率変数である。

よって，$E(X)=100\times\frac{2}{9}=\frac{200}{9}$　　$\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{9}}=\frac{10\sqrt{14}}{9}$

4　【12 点】

$2^x+2^{-x}=t$とおくと，

$2^x>0$，$2^{-x}>0$なので，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$t=2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2$$

$(2^x+2^{-x})^3=t^3$より，$8^x+8^{-x}=t^3-3t$

$(2^x+2^{-x})^2=t^2$より，$4^x+4^{-x}=t^2-2$

よって方程式は

$$t^3-4t^2-t+4=0$$

これを解いて，$t=-1$，1，4

$t\geqq2$より，$t=4$

つまり，$2^x+2^{-x}=4$

両辺を2^x倍して，$(2^x)^2-4\cdot2^x+1=0$

$2^x=2\pm\sqrt{3}$　　これは $2^x>0$ をみたす。

したがって，$x=\log_2(2\pm\sqrt{3})$

記号	数	番号	

検査Ｖ　数学解答例

5【(1) (2) : 各8点　計 16 点】

（１）$f(x)=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$

放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ が $2\leqq x\leqq 5$ で接するときを考える。

$x^2-6x+11=ax$ すなわち $x^2-(a+6)x+11=0$ ……①

が $2\leqq x\leqq 5$ の範囲に重解をもてばよい。

①の判別式を D とすると

$$D=(a+6)^2-44=a^2+12a-8$$

①が重解をもつとき，$D=0$ であるから

$$a^2+12a-8=0$$

$$a=-6\pm 2\sqrt{11}$$

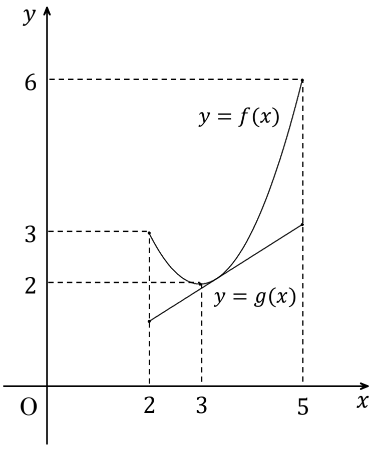
$a=-6+2\sqrt{11}$ のとき，①の解は $x=\sqrt{11}$

$a=-6-2\sqrt{11}$ のとき，①の解は $x=-\sqrt{11}$

よって，$2\leqq x\leqq 5$ の範囲に重解をもつのは　$a=-6+2\sqrt{11}$

したがって，求める a の値の範囲は

$$a\geqq -6+2\sqrt{11}$$



（２）$a\leqq 0$のとき

$2\leqq x\leqq 5$ をみたす全ての x について

$g(x)<f(x)$ となるので不適。

$a>0$のとき

$2\leqq x\leqq 5$ における $f(x)$ の最小値を m，$g(x)$ の最大値を M とおくと

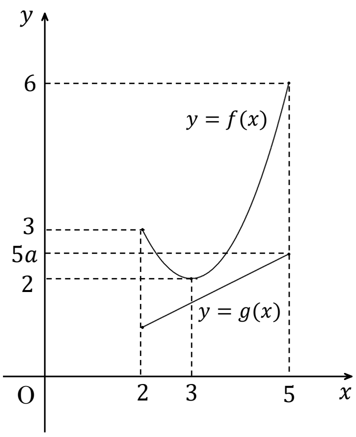
$$m=2,\ M=5a$$

$m\leqq M$ となるような a の値の範囲を求めればよいので

$$2\leqq 5a$$

$$a\geqq\frac{2}{5}$$　これは $a>0$ をみたす。

以上より，　$a\geqq\dfrac{2}{5}$



記号	数	番号	

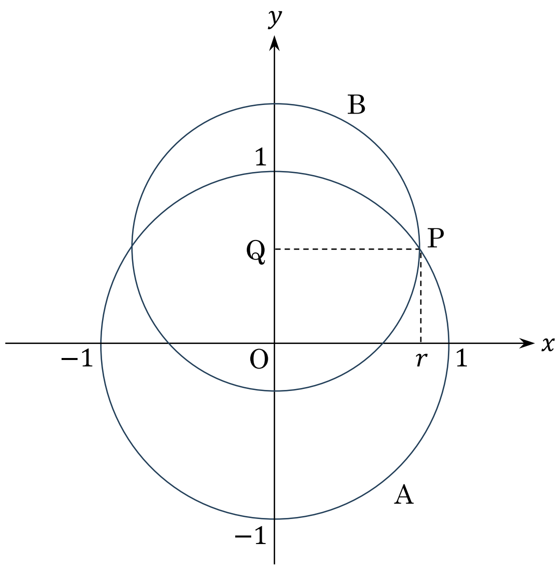
検査V　**数学解答例**

6　【14点】

円Aの方程式は　$x^2+y^2=1$,

点Qの座標は　$\left(0,\ \sqrt{1-r^2}\right)$　$(0<r<1)$

で表される。



$$V=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi\int_0^{\sqrt{1-r^2}}(1-y^2)\,dy+\frac{2}{3}\pi$$

$$\frac{dV}{dr}=2\pi r^2+\pi\{1-(1-r^2)\}\cdot\frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$=\frac{\pi r^2\left(2\sqrt{1-r^2}-r\right)}{\sqrt{1-r^2}}$$

$\dfrac{dV}{dr}=0$ とすると,

$$2\sqrt{1-r^2}-r=0$$

$$r^2=\frac{4}{5}$$

$$r=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって，右の表から Vは

$$r=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

のときに最大となる。

r	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\cdots$	1
$\frac{dV}{dr}$		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

記号	数	番号	

検査Ⅴ　**数学解答例**

7 【(1):8点, (2):5点, (3):8点　計 21 点】

（１）$n \geqq 2$のとき

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,(-\cos x)' dx$$

$$= [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

よって，$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

（２）$n = 1$ のとき，$n\,I_1\,I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$n \geqq 2$ のとき，（１）より $nI_nI_{n-1} = n \cdot \dfrac{n-1}{n} I_{n-2} \cdot I_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$ だから，

$nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2} = \cdots\cdots = 2\,I_2\,I_1 = 1\,I_1\,I_0 = \dfrac{\pi}{2}$　　よって，$nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ $(n \geqq 1)$

（３）$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ では，$0 \leqq \sin x \leqq 1$ より，$\sin^{n+1} x \leqq \sin^n x \leqq \sin^{n-1} x$

この各辺を 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで x で積分して，$I_{n+1} < I_n < I_{n-1}$　……①

$\sin^n x \geqq 0$ より $I_n > 0$ なので，①の各辺に I_n をかけて，$I_{n+1}I_n < {I_n}^2 < I_nI_{n-1}$

よって，（２）の結果を用いると，$\dfrac{\pi}{2(n+1)} < {I_n}^2 < \dfrac{\pi}{2n}$

すなわち，$\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} < I_n < \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} = 0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} = 0$ であるから，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$