令３　中学校・高等学校数学（4 枚のうち 1）

（解答はすべて、解答用紙に記入すること）

Ⅰ　次の各問いに答えなさい。解答は、答えのみでよい。

(1)　不等式 $3(x+2) > 4x+a$ を満たす最大の整数 x が 5 であるとき、定数 a の値の範囲を求めなさい。

(2)　あるクラスの生徒 40 人が 50 点満点の試験を受けたところ、その得点のデータの平均点は 32 点、四分位範囲は 18 点、分散は 25 であった。次のようにデータを変更したときの、平均点、四分位範囲、分散を求めなさい。

ア　生徒全員の得点に 10 点を加えたとき

イ　生徒全員の得点を 2 倍したとき

(3)　次の枠内は、「1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき、少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を求めなさい。」という問題Aに対する、ある生徒の答案である。次の問いに答えなさい。

> 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき、1 回目に 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$
> 2 回目、3 回目に 1 の目が出る確率も同様にして、それぞれ $\frac{1}{6}$
> よって、求める確率は $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

ア　次の文は、上の枠内の答案の誤りについて述べたものである。$\boxed{}$ に当てはまる最も適当な語句を入れなさい。

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき、「1 回目に 1 の目が出る」、「2 回目に 1 の目が出る」、「3 回目に 1 の目が出る」という各事象は $\boxed{}$ ではないので、各回に 1 の目が出る確率を加えるだけでは誤りである。

イ　問題Aを解きなさい。

(4)　直線 $y=x-1$ が円 $x^2+y^2-2x+4y=0$ によって切り取られる弦の長さを求めなさい。

(5)　初項から第 n 項までの和 S_n が、$S_n=n^2+2n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えなさい。

ア　一般項 a_n を求めなさい。

イ　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$ の和を求めなさい。

(6)　関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$ を x について微分しなさい。

Ⅱ　k を実数の定数とする。θ の関数 $f(\theta)=\sin 2\theta+\sin\theta-\cos\theta+k$ について、次の問いに答えなさい。ただし、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき、t のとりうる値の範囲を求めなさい。

(2)　(1) の t を用いて、$f(\theta)$ を t の式で表しなさい。

(3)　θ の方程式 $f(\theta)=0$ が異なる 3 つの解をもつような k の値の範囲を求めなさい。

Ⅲ　$0<t<1$ とし、放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を ℓ とする。$0 \leqq x \leqq 1$ において、C と ℓ と x 軸で囲まれた図形を D_1、C と ℓ と直線 $x=1$ で囲まれた図形を D_2 とおく。D_1 と D_2 の面積の和を S とするとき、次の問いに答えなさい。

(1)　接線 ℓ の方程式を t を用いて表しなさい。

(2)　S を t を用いて表しなさい。

(3)　S が最小となるときの t の値を求めなさい。また、そのときの S の最小値を求めなさい。

(4)　(3) のとき、D_1 と D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積の和を求めなさい。

Ⅳ　三角形OABにおいて、$\mathrm{OA}=2\sqrt{6}$、$\mathrm{OB}=\sqrt{15}$、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6$ とする。線分ABを 1：2 に内分する点をCとおき、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき、次の問いに答えなさい。ただし、(1)、(2)の解答は、答えのみでよい。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表しなさい。また、$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ を求めなさい。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}$ とする。直線OCと直線ADの交点をEとするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表しなさい。

(3)　直線OBに関して、点Cと対称な点をFとする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$、$\vec{b}$ を用いて表しなさい。

(4)　(2)、(3) のとき、三角形OEFの面積を求めなさい。

数学 2/4
受験番号

令３　中学校・高等学校数学解答用紙（4 枚のうち 2）

総計

数学

Ⅰ	(1)							
	(2)	ア	平均点	（点）	四分位範囲	（点）	分散	
		イ	平均点	（点）	四分位範囲	（点）	分散	
	(3)	ア			イ			
	(4)							
	(5)	ア			イ			
	(6)							
Ⅱ	(1)							
	(2)							
	(3)							

Ⅰ

Ⅱ

数学 3/4
受験番号

令３　中学校・高等学校数学解答用紙（4 枚のうち 3）

数学

Ⅲ	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	

Ⅲ		

数学 4/4

受験番号

令３　中学校・高等学校数学解答用紙（４ 枚のうち４）

数学

Ⅳ	(1)	$\overrightarrow{OC} =$	$\left\|\overrightarrow{OC}\right\| =$
	(2)	$\overrightarrow{OE} =$	
	(3)		
	(4)		

Ⅳ		

令３　中学校・高等学校数学　模範解答

総計
２００

<table>
<tr><td rowspan="8">I
60</td><td>(1)</td><td colspan="7">$0 \leqq a < 1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td>ア</td><td>平均点</td><td>42　（点）</td><td>四分位範囲</td><td>18　（点）</td><td>分散</td><td>25</td></tr>
<tr><td>イ</td><td>平均点</td><td>64　（点）</td><td>四分位範囲</td><td>36　（点）</td><td>分散</td><td>100</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>ア</td><td colspan="3">互いに排反</td><td>イ</td><td colspan="2">$\frac{91}{216}$</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="7">$2\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>(5)</td><td>ア</td><td colspan="3">$a_n = 2n+1$</td><td>イ</td><td colspan="2">$\frac{1}{6}$</td></tr>
<tr><td>(6)</td><td colspan="7">$f'(x) = -\cos x + 1$</td></tr>
</table>

I

II（40）

(1)

$t = \sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$　より　$-\frac{\pi}{4} \leqq \theta - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$　であるから

$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$

よって、$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(2)

$t^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 - \sin 2\theta$　であるから

$\sin 2\theta = 1 - t^2$

よって、$f(\theta) = 1 - t^2 + t + k$

$= -t^2 + t + k + 1$

(3)

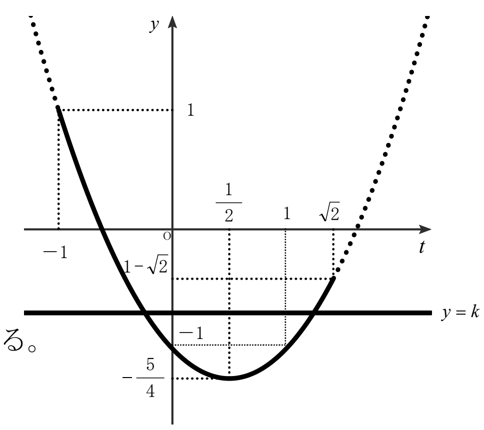
$f(\theta) = 0$　より、

$1 - t^2 + t + k = 0$

$t^2 - t - 1 = k$

ここで、$g(t) = t^2 - t - 1$ とおくと

$g(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$



$y = g(t)$ と直線 $y = k$ との $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における共有点を考える。

t の値に対応する θ の個数は

$1 \leqq t < \sqrt{2}$ のとき、θ は２個、$-1 \leqq t < 1$、$t = \sqrt{2}$ のとき θ は１個となる。

よって、題意を満たすには、$g(t) = k$ が

$1 \leqq t < \sqrt{2}$ に１個と、$-1 \leqq t < 1$ に１個の解をもてばよい。

グラフより、$-1 \leqq k < 1 - \sqrt{2}$

II

令３　中学校・高等学校数学　模範解答

Ⅲ
50

(1)

$y'=2x$

点$(t,\ t^2)$における接線ℓの方程式は

$y-t^2=2t(x-t)$　より

$y=2tx-t^2$

(2)

$$S=\int_0^1\left\{x^2-\left(2tx-t^2\right)\right\}dx-\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times t^2$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-t\right)^3\right]_0^1-\frac{1}{4}t^3$$

$$=-\frac{1}{4}t^3+t^2-t+\frac{1}{3}$$

(3)

$f(t)=-\dfrac{1}{4}t^3+t^2-t+\dfrac{1}{3}$　とおく。

$f'(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+2t-1=-\dfrac{1}{4}(3t-2)(t-2)$

$f'(t)=0$　とすると、

$0<t<1$　より、$t=\dfrac{2}{3}$

増減表より、

最小となるtの値は、$t=\dfrac{2}{3}$

また、そのときの最小値は、$\dfrac{1}{27}$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	極小 $\dfrac{1}{27}$	↗	

(4)

(3)のとき、接線ℓの方程式は、$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{9}$

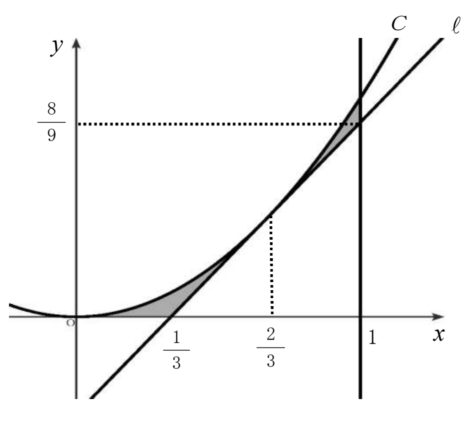
接線ℓとx軸との交点の座標は、$\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

求める体積をVとおくと、

$$V=\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{8}{9}\right)^2\pi$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1-\frac{128}{729}\pi$$

$$=\frac{89}{3645}\pi$$



Ⅲ

令３　中学校・高等学校数学　模範解答

Ⅳ
50

(1)

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$　　　$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{15}$

(2)

$\overrightarrow{OE}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

(3)

$\overrightarrow{OF}=s\vec{a}+t\vec{b}$　（s、t は実数）とおく。

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OC}=\left(s-\dfrac{2}{3}\right)\vec{a}+\left(t-\dfrac{1}{3}\right)\vec{b}$

$\overrightarrow{CF}\perp\vec{b}$　より　$\overrightarrow{CF}\cdot\vec{b}=\left(s-\dfrac{2}{3}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(t-\dfrac{1}{3}\right)\left|\vec{b}\right|^2=0$

よって、$2s+5t=3$　…①

線分ＣＦの中点をＭとすると、

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OF}$

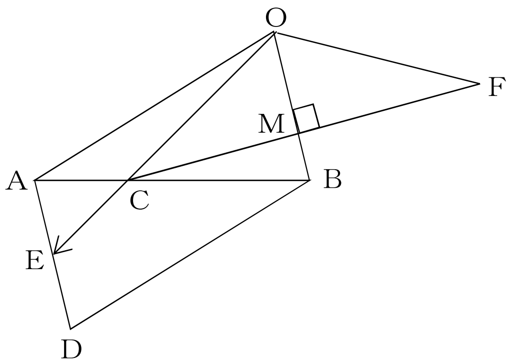
$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}+s\right)\vec{a}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}+t\right)\vec{b}$　　…②

点ＭはＯＢ上の点より、②から、　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}+s\right)=0$

よって、$s=-\dfrac{2}{3}$

①から、$t=\dfrac{13}{15}$

ゆえに、$\overrightarrow{OF}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}$



(4)

(3)より、$\overrightarrow{OM}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$　であるから、$\mathrm{OM}=\dfrac{3}{5}\sqrt{15}$

$\mathrm{OC}=\sqrt{15}$ より、$\mathrm{CM}=\sqrt{\left(\sqrt{15}\right)^2-\left(\dfrac{3}{5}\sqrt{15}\right)^2}=\dfrac{4}{5}\sqrt{15}$

三角形ＯＥＦの面積は、

$\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{OCF}=\dfrac{3}{2}\times2\times\triangle\mathrm{OCM}=3\triangle\mathrm{OCM}=3\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}\sqrt{15}\times\dfrac{4}{5}\sqrt{15}=\dfrac{54}{5}$

別解

$\left|\overrightarrow{OE}\right|=\dfrac{3}{2}\times\left|\overrightarrow{OC}\right|=\dfrac{3}{2}\sqrt{15}$

$\left|\overrightarrow{OF}\right|=\sqrt{15}$

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=\left(\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}\right)=-\dfrac{2}{3}\left|\vec{a}\right|^2+\dfrac{13}{15}\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{13}{30}\left|\vec{b}\right|^2$

$=-\dfrac{63}{10}$

求める三角形ＯＥＦの面積は、

$\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{OE}\right|^2\left|\overrightarrow{OF}\right|^2-\left(\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2^6\times3^6}{10^2}}=\dfrac{54}{5}$

Ⅳ