令６　中学校・高等学校数学（５枚のうち１）
（解答はすべて、解答用紙に記入すること）

Ⅰ　次の問いに答えなさい。解答は、答えのみでよい。

⑴　次のデータは、10 人の生徒に 30 点満点の数学のテストを行った結果である。このデータの平均値と中央値を求めなさい。ただし、単位は点である。

23, 14, 27, 16, 17, 23, 26, 11, 26, 12

⑵　方程式 $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ を解きなさい。

⑶　次の $\boxed{①}$、$\boxed{②}$ に当てはまる数を求めなさい。

$\boxed{1}$、$\boxed{2}$、$\boxed{3}$、$\boxed{4}$ の４枚のカードがある。この４枚のカードを左から右に並べて４けたの整数をつくるとき、４けたの整数は全部で $\boxed{①}$ 通りあり、それらの総和は $\boxed{②}$ × 1111 である。

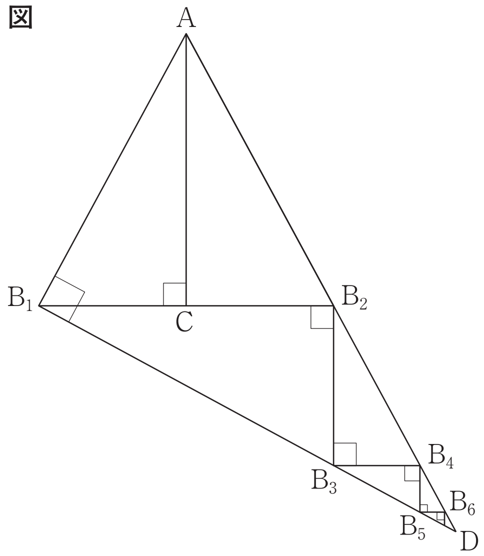
⑷　１辺の長さが 2cm の正八面体の体積を求めなさい。

⑸　①　2024 を素因数分解しなさい。

②　２桁の連続するいくつかの自然数の和が 2024 となるとき、その連続する２桁の自然数の最初の数と最後の数を求めなさい。

⑹　**図**のように、$AB_1 = AB_2$ である二等辺三角形 AB_1B_2 において、頂点 A から辺 B_1B_2 に垂線を下ろし、その交点を C とする。さらに、点 B_1 を通り辺 AB_1 に垂直な直線と AB_2 の延長との交点を D とする。$B_1C = a$、$CA = b$ として、$\boxed{①}$ ～ $\boxed{⑤}$ に当てはまる式を a、b を用いて表しなさい。ただし、$0 < a < b$ とし、同じ記号には同じ式が入る。

図



点 B_2 を通り辺 B_1B_2 に垂直な直線と辺 B_1D との交点を B_3、点 B_3 を通り辺 B_2B_3 に垂直な直線と辺 AD との交点を B_4、点 B_4 を通り辺 B_3B_4 に垂直な直線と辺 B_1D との交点を B_5、点 B_5 を通り辺 B_4B_5 に垂直な直線と辺 AD との交点を B_6 と定め、以下同様に点 B_7、B_8、B_9、……を定めていく。

このとき、辺 B_1B_2 の長さは $\boxed{①}$、辺 B_2B_3 の長さは $\boxed{②}$、辺 B_3B_4 の長さは $\boxed{③}$ である。

また、$S = B_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \cdots\cdots$ とすると、S は初項 $\boxed{①}$、公比 $\boxed{④}$ の無限等比級数で表され、公比は $0 < \boxed{④} < 1$ であるから収束し、S は $\boxed{⑤}$ となる。

令６　中学校・高等学校数学（５枚のうち２）

（解答はすべて、解答用紙に記入すること）

Ⅱ　三角形ABCにおいて、辺ABを5：2に内分する点をD、辺ACを10：3に外分する点をEとし、辺BCと線分DEの交点をF、直線AFと線分BEの交点をGとするとき、次の問いに答えなさい。

⑴　BF：FCを求めなさい。解答は、答えのみでよい。

⑵　BG：GEを求めなさい。解答は、答えのみでよい。

⑶　4点B、D、C、Eが同一円周上にあるとする。

ア　AB：AEを求めなさい。

イ　点Fから辺AB、線分AEに下ろした垂線の長さをそれぞれh_1、h_2とするとき、$h_1 : h_2$を求めなさい。

Ⅲ　θについての2つの関数

$$f(\theta)=\sqrt{3}\sin 2\theta-a\text{、}g(\theta)=2a\sin^2\theta$$

が、$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2$ を満たしているとき、次の問いに答えなさい。ただしaは定数とする。

⑴　aの値を求めなさい。解答は、答えのみでよい。

⑵　$0\leqq\theta<2\pi$　のとき、方程式 $g(\theta)-\sqrt{3}\cos\theta-2=0$ を解きなさい。

⑶　⑵で求めた解のうち、最も小さいものをαとする。

$0\leqq\theta\leqq\pi$　のとき、不等式 $f(\theta)+g(\theta)\geqq f(\alpha)+g(\alpha)$ を解きなさい。

Ⅳ　aは正の定数とする。曲線 $y=\dfrac{1}{3}x^3-ax$ について、次の問いに答えなさい。

⑴　曲線上の点（0,　0）における接線の傾きをaを用いて表しなさい。解答は、答えのみでよい。

⑵　曲線上の点（0,　0）における接線に垂直な直線のうち、点（0,　0）を通る直線ℓの方程式をaを用いて表しなさい。解答は、答えのみでよい。

⑶　⑵における直線ℓと曲線の共有点のx座標のうち、正であるものをaを用いて表しなさい。

⑷　⑵における直線ℓと曲線で囲まれた2つの部分の面積の和Sをaを用いて表しなさい。また、面積の和Sの最小値とそのときのaの値を求めなさい。

受験番号

令６　中学校・高等学校数学解答用紙（５枚のうち３）

総計

数学

Ⅰ	(1)	平均値	（点）	中央値	（点）	
	(2)	$x=$				
	(3)	①		②		
	(4)	cm^3				
	(5)	①	2024＝	②	最初の数は　　　、最後の数は	
	(6)	①		②		③
		④		⑤		
Ⅱ	(1)	BF：FC＝				
	(2)	BG：GE＝				
	(3)	ア				
		イ				

Ⅰ

Ⅱ

数学 4/5 受験番号

令６　中学校・高等学校数学解答用紙（５枚のうち４）

数学

Ⅲ	(1)	$a=$
	(2)	
	(3)	

Ⅲ		

数学 5/5

受験番号

令６　中学校・高等学校数学解答用紙（５枚のうち５）

数学

Ⅳ	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	

Ⅳ		

受験番号

令6　中学校・高等学校数学模範解答（5枚のうち3）

総計	200

数学

Ⅰ	(1)	平均値	19.5（点）	中央値	20（点）
	(2)	$x=0, 2$			
	(3)	① 24		② 60	
	(4)	$\frac{8}{3}\sqrt{2}$ cm^3			
	(5)	① $2024=2^3\cdot 11\cdot 23$		② 最初の数は　77　、最後の数は　99	
	(6)	① $2a$	② $\frac{2a^2}{b}$	③ $\frac{2a^3}{b^2}$	
		④ $\frac{a}{b}$		⑤ $\frac{2ab}{b-a}$	

Ⅰ	60

Ⅱ	(1)	BF：FC＝　4：3	
	(2)	BG：GE＝　14：15	
	(3)	ア	方べきの定理により　AD･AB＝AC･AE $\frac{5}{7}\text{AB}\cdot\text{AB}=\frac{7}{10}\text{AE}\cdot\text{AE}$ $\frac{\text{AB}^2}{\text{AE}^2}=\frac{49}{50}$ AB＞0，AE＞0 であるから $\frac{\text{AB}}{\text{AE}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$ したがって　AB：AE＝$7:5\sqrt{2}$
		イ	AB：AE＝$7:5\sqrt{2}$ より AB：AC＝$7:5\sqrt{2}\times\frac{7}{10}$ よって AB：AC＝$\sqrt{2}:1$ また BF：FC＝4：3 より △ABF：△ACF＝4：3 △ABF＝$\frac{1}{2}\cdot\text{AB}\cdot h_1$ △ACF＝$\frac{1}{2}\cdot\text{AC}\cdot h_2$ したがって $\text{AB}\cdot h_1:\text{AC}\cdot h_2=4:3$ $\sqrt{2}\,\text{AC}\cdot h_1:\text{AC}\cdot h_2=4:3$ $h_1:h_2=2\sqrt{2}:3$

Ⅱ	40

令６　中学校・高等学校数学模範解答（５枚のうち４）

Ⅲ

(1)　$a=\ 1$

(2)

$a=1$ より

$2\sin^2\theta=\sqrt{3}\cos\theta+2$

$2(1-\cos^2\theta)=\sqrt{3}\cos\theta+2$

$2\cos^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta=0$

$\cos\theta(2\cos\theta+\sqrt{3})=0$

よって $\cos\theta=0$ または $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(3)

(2)より　$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\pi-1=\sqrt{3}\cdot0-1=-1,\quad g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin^2\dfrac{\pi}{2}=2\cdot1^2=2$ より

$\sqrt{3}\sin2\theta-1+2\sin^2\theta\geqq-1+2$

$\sqrt{3}\sin2\theta+2\cdot\dfrac{1-\cos2\theta}{2}\geqq2$

$\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta\geqq1$

$2\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\geqq1$

$\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{11}{6}\pi$ であるから

不等式を満たす θ の範囲は

$\dfrac{\pi}{6}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

よって、

$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

Ⅲ	50	

令６　中学校・高等学校数学模範解答（５枚のうち５）

Ⅳ	(1)	$-a$
	(2)	$y=\dfrac{1}{a}x$
	(3)	(2)より $\dfrac{1}{3}x^3-ax=\dfrac{1}{a}x$ よって $\dfrac{1}{3}x\left\{x^2-3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\right\}=0$ これを解いて、共有点の x 座標は $x=0,\ \pm\sqrt{3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)}$ このうち、正であるものは $\sqrt{3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)}$
	(4)	関数 $y=\dfrac{1}{3}x^3-ax$ と関数 $y=\dfrac{1}{a}x$ のグラフはそれぞれ原点に関して対称である。 よって　面積の和 S は $S=2\displaystyle\int_0^{\sqrt{3\left(a+\frac{1}{a}\right)}}\left\{\dfrac{1}{a}x-\left(\dfrac{1}{3}x^3-ax\right)\right\}dx$ $=2\displaystyle\int_0^{\sqrt{3\left(a+\frac{1}{a}\right)}}\left\{-\dfrac{1}{3}x^3+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)x\right\}dx$ $=2\left[-\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)x^2\right]_0^{\sqrt{3\left(a+\frac{1}{a}\right)}}$ $=2\left\{-\dfrac{1}{12}\cdot9\cdot\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\cdot3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\right\}$ $=2\left(-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}\right)\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2$ $=\dfrac{3}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2$ ここで a は正の定数より $a>0,\ \dfrac{1}{a}>0$ であるから 相加平均と相乗平均の関係より $a+\dfrac{1}{a}\geqq2\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{a}}=2$ 等号成立条件は $a=\dfrac{1}{a}$ $a>0$ より $a=1$ $a+\dfrac{1}{a}>0$ より $a+\dfrac{1}{a}$ が最小のとき $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2$ も最小である よって $a=1$ のとき 面積の和 S の最小値は $\dfrac{3}{2}\cdot2^2=6$

Ⅳ	50