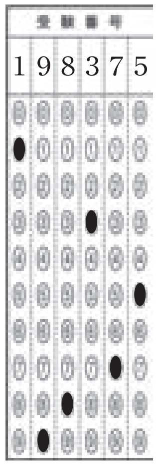
令和６年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学

マーク式解答用紙
受験番号記入例 ※1



解答についての注意点

1　解答用紙は、マーク式解答用紙と記述式解答用紙の２種類があります。

2　大問 $\boxed{1}$ ～大問 $\boxed{2}$ については、マーク式解答用紙に、
大問 $\boxed{3}$ ～大問 $\boxed{4}$ については、記述式解答用紙に記入してください。

3　解答用紙が配付されたら、まずマーク式解答用紙に受験番号等を記入し、受験番号に対応する数字を、右の記入例に従って、鉛筆で黒くぬりつぶしてください。※1
記述式解答用紙は、全ての用紙の上部に受験番号のみを記入してください。※2

4　大問 $\boxed{1}$ ～大問 $\boxed{2}$ については、次のマーク式解答用紙への解答上の注意をよく読んで解答してください。

記述式解答用紙
受験番号記入例 ※2

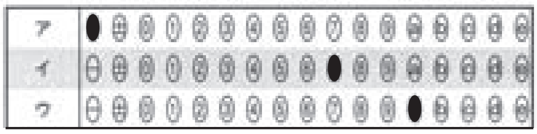
受験番号	１９８３７５

マーク式解答用紙への解答上の注意

（1）　解答は、マーク式解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしてください。間違ってマークしたときは、消しゴムできれいに消してください。

（2）　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イウ}}$ などには、特に指示のないかぎり、符号（−、±）、数字（0 ～ 9）、又は文字（a ～ e）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらをマーク式解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークしてください。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に $-7a$ と答えたいとき



なお、同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イウ}}$ などが２度以上現れる場合、２度目以降は、$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イウ}}$ のように細枠で表記します。

（3）　分数の形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えば、$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として答えてください。

また、それ以上約分できない形で答えてください。

例えば、$\dfrac{3}{4}$、$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを、$\dfrac{6}{8}$、$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

（4）　小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えてください。

また、必要に応じて、指定された桁まで 0 にマークしてください。

例えば、$\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}$ に 2.9 と答えたいときは、2.90 として答えてください。

（5）　根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。

例えば、$4\sqrt{2}$、$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$、$6\sqrt{2a}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$、$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$、$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

（6）　比の形で解答する場合、最も簡単な整数比で答えてください。

例えば、1：3 と答えるところを、2：6 のように答えてはいけません。

5　その他、係員が注意したことをよく守ってください。

指示があるまで中をあけてはいけません。

1

(1) AB $=5$, BC $=6$, $\angle$ABC $=60^\circ$ の△ABC において,

辺 BC の 3 等分点を B に近い方から D, E とおく。

(ア) AD $=\sqrt{\boxed{アイ}}$ であり, △ABD の外接円の半径は, $\dfrac{\sqrt{\boxed{ウエ}}}{\boxed{オ}}$ である。

(イ) △ABC の辺 AC を $2:3$ に内分する点を P とおき, 線分 BP と線分 AD の交点を Q,

線分 BP と線分 AE の交点を R とおくと, AR $=\dfrac{\sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{ク}}$ であり,

BQ : QR : RP $=\boxed{ケコ}:\boxed{サ}:\boxed{シ}$ である。

(2) 3 点 A$(1, 1)$, B$(-3, -7)$, C$(5, -1)$がある。

このとき, AB, BC の垂直二等分線の方程式は,

それぞれ $y=-\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}x-\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$, $y=-\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}x-\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ である。

よって, 3 点 A, B, C を通る円 O の方程式は,

$(x-\boxed{ナ})^2+(y+\boxed{ニ})^2=\boxed{ヌネ}$ となる。

また, 2 点 A, B における円 O の接線の交点を D とすると,

点 D の座標は $(\boxed{ノハ}, \boxed{ヒ})$ であり, △ABD の面積は $\boxed{フヘ}$ である。

2

(1) 1 から 10 までの自然数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。

2 枚のカードを同時に取り出すとき，取り出した 2 枚のカードの自然数の和が 5 の倍数となる確率は，$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

ただし，どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

(2) a を定数とする。放物線 $y=-x^2+(a+2)x-a-4$ が x 軸と 2 点で交わり，

かつ直線 $y=x+5$ と共有点をもたないような整数 a は，$\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。

(3) $x+y+z=8\quad(x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0)$ を満たす整数 $x,\ y,\ z$ の組 $(x,\ y,\ z)$ は，

全部で $\boxed{\text{エオ}}$ 組存在する。

(4) 自然数 n が n 回ずつ続く，次のような数列がある。

$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ \cdots$

自然数 24 が初めて現れるのは第 $\boxed{\text{カキク}}$ 項で，第 2024 項は自然数 $\boxed{\text{ケコ}}$ である。

(5) a を定数とする。3 次方程式 $x^3-(a+6)x^2+(16+6a)x-16a=0$ の 1 つの解が

$\sqrt{5}$ であるとき，a の値は $a=\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ であり，他の解は $x=\boxed{\text{シ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\,i$ である。

(6) $x=4^{10},\ y=9^3,\ z=5^2$ とするとき，xyz は $\boxed{\text{セソ}}$ 桁の整数である。

ただし，$\log_{10}2=0.3010,\ \log_{10}3=0.4771$ とする。

(7) 平面上に 3 点 O，A，B があり，OA $=7$，OB $=8$，AB $=9$ となっている。

正の実数 t に対して，動点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる点としたとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の

内積は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{\text{タチ}}$ であり，線分 OP の長さの最小値は $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

（8） 2 つの放物線 C_1 ： $y = -x^2$ ， C_2 ： $y = x^2 - 2x + 13$ がある。

放物線 C_1 ， C_2 の共通接線 ℓ ，m の方程式は，

それぞれ $y = \boxed{\text{ト}}\, x + \boxed{\text{ナ}}$ ， $y = \boxed{\text{ニヌ}}\, x + \boxed{\text{ネ}}$ となる。

また， ℓ ，m と C_1 で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ノハヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$ である。

3

（1）複素数 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{9}$ を計算せよ。

（2）曲線 C：$y=e^{x}$ 上の異なる 2 点 A$(1,e)$，P(t,e^{t}) における

それぞれの法線の交点を Q とする。

線分 AQ の長さを $L(t)$ で表すとき，次の問いに答えよ。

ただし，e は自然対数の底である。

（ア）点 A における法線の方程式を求めよ。

（イ）$\lim\limits_{t\to1} L(t)$ を求めよ。

4

（1）座標平面上に 2 点 A$(1,1)$，B$\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ がある。

点 P が円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くとき，点 P から△ABP の重心までの距離が

最小となる点 P の座標を求めよ。

（2）関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (0\leqq x\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x<0,\ 1<x \text{ のとき}) \end{cases}$$

自然数 k に対して，$\displaystyle\int_0^2 f\left(\frac{e^{x}-1}{k}\right)dx$ を求めよ。

ただし，e は自然対数の底であり，$2.7<e<2.8$ を利用してもよい。

【計算用紙】

（必要に応じて使用すること）

令和６年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

三次選考択一問題の正答について

校種	高等学校	教科・科目	数学

大問番号	小問番号	解答記号	正答番号	大問番号	小問番号	解答記号	正答番号
1	(1)	アイ	19	2	(1)	ア	1
		ウエ	57			イ	5
		オ	3		(2)	ウ	4
		カキ	21		(3)	エオ	45
		ク	2		(4)	カキク	277
		ケコ	10			ケコ	64
		サ	5		(5)	サ	5
		シ	3			シ	3
	(2)	ス	1			ス	7
		セ	2		(6)	セソ	11
		ソ	7		(7)	タチ	16
		タ	2			ツテ	12
		チ	4		(8)	ト	4
		ツ	3			ナ	4
		テ	8			ニヌ	−6
		ト	3			ネ	9
		ナ	1			ノハヒ	125
		ニ	4			フヘ	12
		ヌネ	25				
		ノハ	−9				
		ヒ	1				
		フヘ	40				

受験番号	

令和６年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙 （４枚のうち１）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

3	得点	

（１）

$Z_1=-1+\sqrt{3}i$ ，$Z_2=1+i$ とおく

$|Z_1|=2$ より　$Z_1=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(cos\frac{2}{3}\pi+isin\frac{2}{3}\pi\right)$

$|Z_2|=\sqrt{2}$より　$Z_2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4})$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left\{cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left(cos\frac{5}{12}\pi+isin\frac{5}{12}\pi\right)$$

よって，$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^9=\left(\sqrt{2}\right)^9\left(cos\frac{5}{12}\pi\times9+isin\frac{5}{12}\pi\times9\right)$

$$=16\sqrt{2}\left(cos\frac{15}{4}\pi+isin\frac{15}{4}\pi\right)$$

$$=16\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

$$=16-16i$$

受験番号	

令和６年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち２）

（(2)(イ)は，解答及び解答に至る過程をすべて，解答用紙に記入すること。(2)(ア)は答えのみでよい。）

３

（２）（ア）

$y=-\frac{1}{e}(x-1)+e$

（２）（イ）

Ａにおける法線の方程式は，　$y=-\frac{1}{e}(x-1)+e$

$\therefore ye=-x+1+e^2$ …①

同様にして，Ｐにおける法線の方程式は，　$y=-\frac{1}{e^t}(x-t)+e^t$

$\therefore\ ye^t=-x+t+e^{2t}$ …②

これらを連立させて，②－①より　$y(e^t-e)=(t-1)+(e^t-e)(e^t+e)$

$\therefore y=\frac{t-1}{e^t-e}+e^t+e$ …③

ここで，$f(x)=e^x$とおくと，微分の定義より

$\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(1)=e$

よって，③の y について，$\lim_{t\to1}y=\frac{1}{e}+2e$ …④

これを①の y に代入すると，$e\left(\frac{1}{e}+2e\right)=-x+1+e^2$　　$\therefore x=-e^2$

よって，$t\to1$ のときにＱが近づく点Q_1とすると

$\mathrm{Q}_1\left(-e^2,\ \frac{1}{e}+2e\right)$である。したがって，

$$\lim_{t\to1}L(t)=\mathrm{AQ}_1$$
$$=\sqrt{(-e^2-1)^2+\left(\frac{1}{e}+2e-e\right)^2}=\sqrt{(e^2+1)^2+\left(\frac{1}{e}+e\right)^2}$$
$$=\sqrt{e^4+2e^2+1+\frac{1}{e^2}+2+e^2}=\sqrt{e^4+3e^2+3+\frac{1}{e^2}}=\sqrt{\frac{e^6+3e^4+3e^2+1}{e^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{e^6+3e^4+3e^2+1}}{e}=\frac{\sqrt{(e^2+1)^3}}{e}=\frac{(e^2+1)\sqrt{e^2+1}}{e}$$

受験番号	

令和６年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙 （４枚のうち３）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

4	得点	

（Ⅰ）

P$\left(\cos\theta, \sin\theta\right)$とおき，△ABPの重心をG$\left(X, Y \right)$とおくと，

$$X = \frac{1+2+\cos\theta}{3} = 1 + \frac{\cos\theta}{3}$$

$$Y = \frac{1+\frac{1}{2}+\sin\theta}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sin\theta}{3}$$

$$\therefore PG^2 = \left\{\cos\theta - \left(1+\frac{\cos\theta}{3}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\theta - \left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\theta}{3}\right)\right\}^2$$

$$= \left(\frac{2}{3}\cos\theta - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3}\cos\theta - \frac{2}{3}\sin\theta$$

$$= \frac{61}{36} - \frac{2}{3}\left(2\cos\theta + \sin\theta\right) \cdots (*)$$

したがって，$2\cos\theta + \sin\theta$が最大のときＰＧは最小となる。

三角関数の合成より

$$2\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{5}\cos(\theta - \alpha)\left(\text{ただし}\alpha\text{は、}\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{を満たす鋭角}\right)$$

と，変形できるから，$(*)$からＰＧは$\theta = \alpha$のとき最小で，このときＰ$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

受験番号	

令和６年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙（４枚のうち４）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

4 （続き）

（２）

$$f\left(\frac{e^x-1}{k}\right)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{k} & \left(0 \leqq \dfrac{e^x-1}{k} \leqq 1 \text{ のとき}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{e^x-1}{k}<0,\ 1<\dfrac{e^x-1}{k} \text{ のとき}\right)\end{cases}$$ より，

$0 \leqq \dfrac{e^x-1}{k} \leqq 1$ を解くと，$0 \leqq x \leqq \log(k+1)$ から，

$$f\left(\frac{e^x-1}{k}\right)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{k} & (0 \leqq x \leqq \log(k+1) \text{ のとき})\\ 0 & (x<0,\ \log(k+1)<x \text{ のとき})\end{cases}$$ となる。

（ｉ）$\log(k+1)<2$　すなわち，$k \leqq 6$ のとき、・・・（※）

$$\int_0^2 f\left(\frac{e^x-1}{k}\right)dx = \int_0^{\log(k+1)}\frac{e^x-1}{k}dx+\int_{\log(k+1)}^2 0\ dx$$

$$= \left[\frac{e^x-x}{k}\right]_0^{\log(k+1)} = \frac{k-\log(k+1)}{k}$$

（※）　$\log(k+1)<2$ のとき，　$k<e^2-1$

$2.7^2<e^2<2.8^2$ より，$6.29<e^2-1<6.84$ で，kは自然数だから

（ii）$\log(k+1) \geqq 2$　すなわち，$k \geqq 7$ のとき，

$$\int_0^2 f\left(\frac{e^x-1}{k}\right)dx = \int_0^2\frac{e^x-1}{k}dx$$

$$= \left[\frac{e^x-x}{k}\right]_0^2 = \frac{e^2-3}{k}$$

（ｉ）（ii）より，

$$\int_0^2 f\left(\frac{e^x-1}{k}\right)dx=\begin{cases}\dfrac{k-\log(k+1)}{k} & (1 \leqq k \leqq 6 \text{ のとき})\\ \dfrac{e^2-3}{k} & (k \geqq 7 \text{ のとき})\end{cases}$$