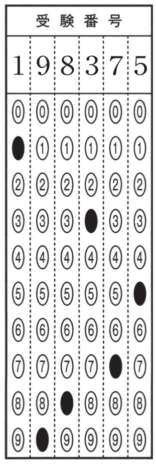
令和３年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学

マーク式解答用紙
受験番号記入例　※1



記述式解答用紙
受験番号記入例　※2

受験番号	1 9 8 3 7 5

解答についての注意点

1　解答用紙は，マーク式解答用紙と記述式解答用紙の２種類があります。

2　大問$\boxed{1}$，大問$\boxed{2}$については，マーク式解答用紙に，
　大問$\boxed{3}$，大問$\boxed{4}$については，記述式解答用紙に記入してください。

3　解答用紙が配付されたら，まずマーク式解答用紙に受験番号等を記入し，受験番号に対応する数字を，右の記入例に従って，鉛筆で黒くぬりつぶしてください。※1
　記述式解答用紙は，全ての用紙の上部に受験番号のみを記入してください。※2

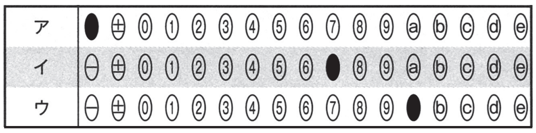
4　大問$\boxed{1}$，大問$\boxed{2}$については，次のマーク式解答用紙への解答上の注意をよく読んで解答してください。

マーク式解答用紙への解答上の注意

（1）　解答は，マーク式解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしてください。間違ってマークしたときは，消しゴムできれいに消してください。

（2）　問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示のないかぎり，符号（－，±），数字（0 ～ 9），または文字（a ～ e）が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらをマーク式解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークしてください。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に $-7a$ と答えたいとき



なお，同一の問題文中に $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ などが２度以上現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細枠で表記します。

（3）　分数の形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えてください。

また，それ以上約分できない形で答えてください。

例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

（4）　小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えてください。
また，必要に応じて，指定された桁まで⓪にマークしてください。

例えば，$\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}$ に 2.9 と答えたいときは，2.90 として答えてください。

（5）　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。

例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

（6）　比の形で解答する場合，最も簡単な整数比で答えてください。

例えば，1：3 と答えるところを，2：6 のように答えてはいけません。

5　その他，係員が注意したことをよく守ってください。

指示があるまで中をあけてはいけません。

1 関数 $f(x) = 27^x + 27^{-x} - 6(9^x + 9^{-x}) + 3(3^x + 3^{-x})$ が最小値をとるときの x を求めよう。

$t = 3^x + 3^{-x}$ とおくと，$9^x + 9^{-x} = t^2 - \boxed{\text{ア}}$，$27^x + 27^{-x} = t^3 - \boxed{\text{イ}}\,t$ より

$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とおくと，$g(t) = t^3 - \boxed{\text{ウ}}\,t^2 + \boxed{\text{エオ}}$ である。

ここで t は $x = \boxed{\text{カ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{キ}}$ をとり，$t \geqq \boxed{\text{キ}}$ を満たすので

$g(t)$ は $t = \boxed{\text{ク}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{ケコサ}}$ をとる。よって $f(x)$ が最小値をとるとき $x = \boxed{\text{シ}}$ である。ただし $\boxed{\text{シ}}$ は下の⓪～⑧のうちから当てはまるものを一つ選べ。

$\boxed{\text{シ}}$ の選択肢

⓪ $2+\sqrt{3}$	① $2-\sqrt{3}$	② $2\pm\sqrt{3}$
③ $3^{2+\sqrt{3}}$	④ $3^{2-\sqrt{3}}$	⑤ $3^{2\pm\sqrt{3}}$
⑥ $\log_3(2+\sqrt{3})$	⑦ $\log_3(2-\sqrt{3})$	⑧ $\log_3(2\pm\sqrt{3})$

$\boxed{2}$ (1) 2つの集合A, Bについて $A=\{2, 5, 7a-a^2\}$, $B=\{3, 6, 5a-3, 2a-b\}$である。6が共通部分$A\cap B$に属していて，$A\cap B=\{5, 6\}$であるとき，$b=$ $\boxed{ア}$ であり，和集合 $A\cup B=\{2, 3, 5, 6, \boxed{イウ}\}$ である。

(2) 1辺の長さが2である正八角形の面積は $\boxed{エ}+\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$ である。

(3) 大小2つのさいころを同時に1回だけ投げ，大きいさいころの目の数を a，小さいさいころの目の数を b とする。座標平面上において，点P（a, b）が

$$\begin{cases} y \geqq \dfrac{1}{9}x^2 \\ y \leqq -\dfrac{1}{3}x+6 \end{cases}$$

を満たす部分に含まれている確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{クケ}}$ である。ただし，さいころは1から6までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(4) 5040の正の約数の個数は $\boxed{コサ}$ 個である。

(5) $xy+7x+5y+12=0$ を満たす整数 x, y のうち，x が最大となるときの x と y の値はそれぞれ $x=\boxed{シス}$，$y=\boxed{セソ}$ である。

(6) $\cos 15^\circ \cos 30^\circ \cos 45^\circ \cos 60^\circ \cos 75^\circ$ の値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チツ}}$ である。

(7) 次の $\boxed{テ}$ に当てはまるものを⓪～④のうちから一つ選べ。

点Pが△OABを含む平面上にあるとき，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ が成り立つことは，点Pが $\boxed{テ}$ 上に存在するための必要十分条件である。

$\boxed{テ}$ の選択肢

⓪ △OABの外接円の周　　① △OABの内接円の周

② 線分ABを直径とする円の周　　③ 線分ABの垂直二等分線

④ ∠AOBの二等分線

(8) 数列 $1, -1, -1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \cdots$ を$\{a_n\}$とする。

次のように，初項から項が1個，2個，3個，・・・となるように群に分け，それぞれ第1群，第2群，第3群，・・・とする。

$1 \mid -1, -1 \mid 0, 0, 0 \mid 1, 1, 1, 1 \mid -1, -1, -1, -1, -1 \mid 0, 0, 0, 0, 0, 0 \mid \cdots$

第 n 群には，$n\equiv 1 \pmod 3$ のとき1が，$n\equiv -1 \pmod 3$ のとき -1 が，$n\equiv 0 \pmod 3$ のとき0が，それぞれ n 個ずつ並んでいるといえる。このとき，a_{324} は第 $\boxed{トナ}$ 群に含まれていて，$\displaystyle\sum_{n=1}^{324} a_n=\boxed{ニヌ}$ である。

3 次の問いに答えよ。

〔1〕座標平面上において，原点を中心とする半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点（x_1 , y_1）における接線の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$ で表されることを証明せよ。

〔2〕点 A$(7,1)$ から円 O：$x^2+y^2=25$ に引いた接線をそれぞれ l，m とし，円 O と l の接点を S，円 O と m の接点を T とおく。ただし，S は第 1 象限にあるとする。

(1) 直線 l，m の方程式をそれぞれ求めよ。

(2) 円 O の短い方の弧 ST と直線 l と直線 m で囲まれた部分に中心があり，直線 l，m，円 O のすべてに接する円の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

〔1〕関数 $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ で次のように定義されている。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+2\tan x} & \left(x \neq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ a & \left(x = \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

(1) $f(x)$ が $x = \dfrac{\pi}{2}$ で連続となるように a の値を定めよ。

(2) (1) のように a を定めるとき，関数 $f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ で微分可能か。その理由を含めて答えよ。

〔2〕次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^2 \frac{x^2+x+1}{x^3+1}\,dx$$

【計算用紙】

（必要に応じて使用すること）

令和3年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

三次選考択一問題の正答について

校種	高等学校	教科・科目	数学

問題番号	解答記号	正解
1	$9^x+9^{-x}=t^2-$ア	$9^x+9^{-x}=t^2-2$
	$27^x+27^{-x}=t^3-$イt	$27^x+27^{-x}=t^3-3t$
	$g(t)=t^3-$ウt^2+エオ	$g(t)=t^3-6t^2+12$
	$x=$カ	$x=0$
	キ	2
	$t=$ク	$t=4$
	ケコサ	−20
	シ	⑧

問題番号	解答記号	正解
2	$b=$ア	$b=7$
	A∪B = {2,3,5,6,イウ}	A∪B = {2,3,5,6,27}
	エ＋オ$\sqrt{カ}$	$8+8\sqrt{2}$
	$\frac{キ}{クケ}$	$\frac{7}{12}$
	コサ	60
	$x=$シス	$x=18$
	$y=$セソ	$y=-6$
	$\frac{\sqrt{タ}}{チツ}$	$\frac{\sqrt{6}}{32}$
	テ	②
	トナ	25
	$\sum_{n=1}^{324} an=$ニヌ	$\sum_{n=1}^{324} an=16$

受験番号	

令和3年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち１）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

3

得点	

〔１〕

(i) $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ のとき, 円の中心（原点）と点 (x_1, y_1) を通る直線の傾きは $\dfrac{y_1}{x_1}$ で,

点 (x_1, y_1) における円の接線はこれと垂直なので, 傾きは $-\dfrac{x_1}{y_1}$ であるから,

$y - y_1 = -\dfrac{x_1}{y_1}(x - x_1)$

$x_1x + y_1y = {x_1}^2 + {y_1}^2$

点 (x_1, y_1) は円上の点なので, ${x_1}^2 + {y_1}^2 = r^2$

よって, 求める接線の方程式は $x_1x + y_1y = r^2 \cdots$ ①

(ii) $x_1 = 0$ のとき, $y_1 = \pm r$

$y_1 = r$ のとき接線の方程式は $y = r$ であり,

$y_1 = -r$ のとき接線の方程式は $y = -r$ である。

(iii) $y_1 = 0$ のとき, $x_1 = \pm r$

$x_1 = r$ のとき接線の方程式は $x = r$ であり,

$x_1 = -r$ のとき接線の方程式は $x = -r$ である。

(ii), (iii) の場合も①は成り立つので

x_1, y_1 の値によらず, 接線の方程式は $x_1x + y_1y = r^2$ であることが示せた。

受験番号	

令和3年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち２）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

3　（続き）

〔２〕（１）

接点の座標を (x_1, y_1) とおくと, 接線の方程式は $x_1x + y_1y = 25$

点 $\mathrm{A}(7,1)$ がこの直線上にあるので $7x_1 + y_1 = 25$

点 (x_1, y_1) は円 O 上にあるので ${x_1}^2 + {y_1}^2 = 25$

${x_1}^2 + (-7x_1 + 25)^2 = 25 \quad \therefore x_1 = 3, 4$

$x_1 = 3$ のとき $y_1 = 4$, $x_1 = 4$ のとき $y_1 = -3$

また, 接点 S が第１象限にあることから

$\mathrm{S}(3,4)$, $\mathrm{T}(4,-3)$

よって, 求める接線の方程式は

$l : 3x + 4y = 25$, $m : 4x - 3y = 25$

（２）

求める円の中心を O’(X,Y), 半径を R とし,

円 O’ と直線 l の接点を S’ とする。

O’ から線分 OS に垂線 O’H を下ろすと,

△ OAS ∽△ OO’H より,

OA : OS=OO’ : OH

$= 5\sqrt{2} : 5 = (5 + R) : (5 - R)$ より, R$= 5(\sqrt{2} - 1)^2$

点 O’(X,Y) は線分 OA を OH : HS $= (5 - \mathrm{R}) : \mathrm{R}$ に内分するので

X$= 14(\sqrt{2} - 1)$, Y$= 2(\sqrt{2} - 1)$

以上より, 円の方程式は

$\{x - 14(\sqrt{2} - 1)\}^2 + \{y - 2(\sqrt{2} - 1)\}^2 = 25(\sqrt{2} - 1)^4$

受験番号	

令和3年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち３）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

4

得点	

〔１〕（１）

$f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続であるための条件は

$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

問題で与えられた条件より $f(\frac{\pi}{2})=a$

また, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+2\tan x}=0$ より

$a=0$ と定めればよい。

（２）

$\dfrac{f(\frac{\pi}{2}+h)-f(\frac{\pi}{2})}{h}=\dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{1}{1+2\tan\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}$

$(\because (1)$ より $f(\frac{\pi}{2})=0)$

$=\dfrac{1}{h}\cdot\dfrac{1}{1-2\dfrac{1}{\tan h}}=\dfrac{1}{h-2\dfrac{h}{\sin h}\cos h}\to -\dfrac{1}{2}(h\to 0)$

$(\because \dfrac{h}{\sin h}\to 1(h\to 0))$

よって $f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で微分可能である。

受験番号	

令和３年度大阪府・大阪市公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち４）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

4　（続き）

〔２〕

$$(\text{与式})=\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx+\int_0^2 \frac{x+1}{x^3+1}\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,dx=\int_0^2 \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\,dx$

$$=\frac{1}{3}\left[\log|x^3+1|\right]_0^2=\frac{1}{3}\log 9=\frac{2}{3}\log 3$$

また $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{x^3+1}\,dx=\int_0^2 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$

$$=\int_0^2 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

ここで $x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$

また x と t の対応は右の表のようになる。

x	$0\to 2$
t	$-\frac{\pi}{6}\to\frac{\pi}{3}$

したがって，

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

よって $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+x+1}{x^3+1}\,dx=\frac{2}{3}\log 3+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

／