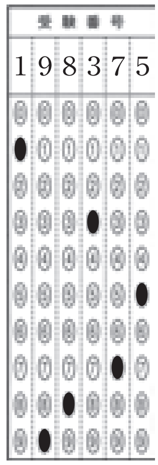
令和５年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学

マーク式解答用紙
受験番号記入例 ※1



解答についての注意点

1　解答用紙は、マーク式解答用紙と記述式解答用紙の２種類があります。

2　大問$\boxed{1}$～大問$\boxed{2}$については、マーク式解答用紙に、
　大問$\boxed{3}$～大問$\boxed{4}$については、記述式解答用紙に記入してください。

3　解答用紙が配付されたら、まずマーク式解答用紙に受験番号等を記入し、受験番号に対応する数字を、右の記入例に従って、鉛筆で黒くぬりつぶしてください。※1
　記述式解答用紙は、全ての用紙の上部に受験番号のみを記入してください。※2

4　大問$\boxed{1}$～大問$\boxed{2}$については、次のマーク式解答用紙への解答上の注意をよく読んで解答してください。

記述式解答用紙
受験番号記入例 ※2

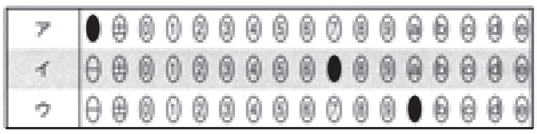
受験番号	198375

マーク式解答用紙への解答上の注意

（1）　解答は、マーク式解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしてください。間違ってマークしたときは、消しゴムできれいに消してください。

（2）　問題の文中の$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イウ}}$などには、特に指示のないかぎり、符号（−、±）、数字（0 ～ 9）、又は文字（a ～ e）が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらをマーク式解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークしてください。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$ に $-7a$ と答えたいとき



なお、同一の問題文中に$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イウ}}$などが２度以上現れる場合、２度目以降は、$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イウ}}$のように細枠で表記します。

（3）　分数の形で解答する場合、分数の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例えば、$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは、$\dfrac{-4}{5}$ として答えてください。

また、それ以上約分できない形で答えてください。

例えば、$\dfrac{3}{4}$、$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを、$\dfrac{6}{8}$、$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

（4）　小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えてください。

また、必要に応じて、指定された桁まで 0 にマークしてください。

例えば、$\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}$ に 2.9 と答えたいときは、2.90 として答えてください。

（5）　根号を含む形で解答する場合、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。

例えば、$4\sqrt{2}$、$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$、$6\sqrt{2a}$ と答えるところを、$2\sqrt{8}$、$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$、$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

（6）　比の形で解答する場合、最も簡単な整数比で答えてください。

例えば、1：3 と答えるところを、2：6 のように答えてはいけません。

5　その他、係員が注意したことをよく守ってください。

指示があるまで中をあけてはいけません。

I

(1) 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ … ①、2 次方程式 $x^2+qx+p=0$ … ② とする。

①の 2 つの解に、それぞれ 1 を足したものが、②の解になるような

定数 p , q の値は、$p=$ $\boxed{アイ}$, $q=$ $\boxed{ウエ}$ であり、

①の 2 つの解を α , β とするとき、$\alpha^2+\beta^2$ の値は $\boxed{オ}$、

$\alpha^3+\beta^3$ の値は $\boxed{カキ}$、$\alpha^{10}+\beta^{10}$ の値は $\boxed{クケコサ}$ である。

(2) △ABC において、$\sin A : \sin B : \sin C = 7:5:4$ が成り立つとき、

$\cos A = \dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$, $\sin A = \dfrac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タ}}}{\boxed{チ}}$ である。

また、この三角形の内接円の面積が 24π であるとき、

AB の長さは $\boxed{ツテ}$ で、△ABC の面積は、$\boxed{トナ}\sqrt{\boxed{ニ}}$ である。

このとき、内接円の中心から AB に下ろした垂線と AB との交点を P とすると、

$AP=$ $\boxed{ヌ}$ である。

$\boxed{2}$

(1) a を実数とする 2 次関数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$ について、

$x = -a+1$ で最小値をとるのは、$\boxed{\text{ア}} \leqq a \leqq \boxed{\text{イ}}$ のときである。

(2) 大、中、小の 3 つのさいころを投げて、出た目の数をそれぞれ a, b, c とする。

このとき、$a+b+c=9$ となる確率は、$\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカキ}}}$ である。

ただし、さいころは 1 から 6 までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(3) △ABC において、辺 AB を 5：4 の比に内分する点を D、辺 AC を 3：2 の比に内分する点を E とする。線分 BE、CD の交点を P とし、直線 AP と線分 BC の交点を F とするとき、

BF：FC＝ $\boxed{\text{ク}}$ ： $\boxed{\text{ケ}}$ であり、△PBC：△ABC＝ $\boxed{\text{コ}}$ ： $\boxed{\text{サシ}}$ である。

(4) 2^n が 20 桁の数となるような、正の整数 n の個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個である。

ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(5) $a_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の、初項から第 n 項までの和を S_n とすると、

$S_n = \boxed{\text{セ}} - \dfrac{\boxed{\text{ソ}}+n}{\boxed{\text{タ}}^{\,n}}$ である。

(6) △OAB において、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ のとき、$|2\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

また、△OAB の垂心を H とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}\vec{b}$ と表される。

(7) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき、$\dfrac{2\sin x + 2}{\cos x + 3}$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

(8) 座標平面上の点（2 , 5）を通る直線 l と曲線 $y = x^2 - 6x + 11$ とで囲まれた部分の面積が最小になるのは、直線 l の傾きが $\boxed{\text{ヒフ}}$ のときである。

3

(1)「n が正の整数であるとき、n^2 が偶数ならば n は偶数である。」ことを用いて、

$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2) 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=16$ の円周上を動く点を P とする。

2 点 A(0, 5), B(0, −5) と点 P で三角形を作るとき、△ABP の重心 G の軌跡を求めよ。

(3) $a_1=1$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

4 関数 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を導関数の定義に従って微分せよ。

(2) 関数 $g(x)$ を次のように定義する。(a, b は定数)

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geqq 1) \\ (x-a)^3+b & (x<1) \end{cases}$$

(ア) $g(x)$ が $x=1$ で連続であるとき、定数 a, b の関係を式で表せ。

(イ) $g(x)$ が $x=1$ で微分可能となるよう、定数 a, b の値を求めよ。

令和5年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

三次選考択一問題の正答について

校種	高等学校	教科・科目	数学

問題番号	解答記号	正解
1	アイ, ウエ	−1, −3
	オ	7
	カキ, クケコサ	10, 4207
	$\frac{\text{シス}}{\text{セ}}$, $\frac{\text{ソ}\sqrt{\text{タ}}}{\text{チ}}$	$\frac{-1}{5}$, $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
	ツテ, $\text{トナ}\sqrt{\text{三}}$	16, $64\sqrt{6}$
	ヌ	4
2	ア, イ	0, 2
	$\frac{\text{ウエ}}{\text{オカキ}}$	$\frac{25}{216}$
	ク:ケ, コ:サシ	6:5, 4:15
	ス	3
	$\text{セ}-\frac{\text{ソ}+n}{\text{タ}^{n}}$	$2-\frac{2+n}{2^{n}}$
	$\sqrt{\text{チツ}}$	$\sqrt{21}$
	$\frac{\text{テ}}{\text{トナ}}\vec{a}$, $\frac{\text{ニ}}{\text{ヌネ}}\vec{b}$	$\frac{8}{35}\vec{a}$, $\frac{3}{35}\vec{b}$
	$\frac{\text{ノ}}{\text{ハ}}$	$\frac{3}{2}$
	ヒフ	−2

受験番号	

令和５年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙 （4 枚のうち 1）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

3

得点	

（1）

$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，

$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}\dots$① と表すことができる。ただし，$p$，$q$ は互いに素である正の整数。

①の両辺を 2 乗して整理すると，

$2p^2=q^2$ …②

②より，q^2 は偶数であるので，q も偶数である。

よって，q は，正の整数 k を用いて，$q=2k$ と表すことができる。

これを②に代入すると，

$2p^2=(2k)^2$

すなわち，$p^2=2k^2$ …③

③より，p^2 は偶数であるので，p も偶数である。

以上より，p,q はともに偶数となり，互いに素である正の整数であることに矛盾する。

よって，$\sqrt{2}$は有理数でない。

すなわち，$\sqrt{2}$は無理数である。

（2）

$\mathrm{P}(s,t),\mathrm{G}(x,y)$とする。点 P は円周上の点なので，$(s-2)^2+(t-1)^2=16$ …①

ここで, 3 点 A，B，P で三角形を作るときの条件は, 3 点が一直線上にないことである。

よって，$s\neq 0$ …②

3 点 A，B，P が三角形を作るとき，点 G は△ABP の重心なので，

$x=\dfrac{0+0+s}{3}$ ，$y=\dfrac{5+(-5)+t}{3}$ 整理して，$s=3x$，$t=3y$

これを①に代入すると，$(3x-2)^2+(3y-1)^2=16$

よって， $\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}\dots$④

また， ②より，$x\neq 0$ なので， ④より， $x=0$ のとき， $y=\dfrac{1\pm 2\sqrt{3}}{3}$

△ABP の重心 G の軌跡は，点$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円である。

ただし， 点$\left(0,\ \dfrac{1\pm 2\sqrt{3}}{3}\right)$をのぞく。

受験番号	

令和５年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙 （4 枚のうち 2）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

3 （続き）

(3)

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ について，2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の解が

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$であることを用いて，

$$a_{n+2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right)\cdots①$$

$$a_{n+2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right)\cdots②$$

と表すことができる。

①より，数列$\left\{a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n\right\}$は，公比が $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ の等比数列であり，初項は

$$a_2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_1=1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

よって，$a_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\cdots③$

②より，　数列$\left\{a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right\}$は，　公比が $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の等比数列であり，初項は

$$a_2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_1=1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

よって，　$a_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\cdots④$

④ − ③により，a_{n+1} を消去して，

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n+\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

よって，

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

受験番号	

令和５年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙 （4 枚のうち 3）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

4

得点	

（1）

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}\times\frac{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\quad -x}{h\left\{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right\}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+h)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

（2）　（ア）

$$\lim_{x\to 1+0}g(x)=\lim_{x\to 1+0}x^{\frac{1}{3}}=1$$

$$\lim_{x\to 1-0}g(x)=\lim_{x\to 1-0}(x-a)^3+b\ \ =(1-a)^3+b$$

$g(x)$ が $x=1$ で連続 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 1+0}g(x)=\lim_{x\to 1-0}g(x)$ より，

$(1-a)^3+b=1$

したがって，$b=1-(1-a)^3$

受験番号	

令和５年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙 （4枚のうち4）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること。）

4 （続き）

（イ）

$g(x)$ が，$x=1$ で微分可能ならば，$x=1$ で連続である。

(ア)より，　$b=1-(1-a)^3\cdots$①

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-a)^3+b-1}{x-1}$$

①より

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-a)^3-(1-a)^3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-1)\{(x-a)^2+(x-a)(1-a)+(1-a)^2\}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1-0}\{(x-a)^2+(x-a)(1-a)+(1-a)^2\}=3(1-a)^2$$

$g(x)$ が $x=1$ で微分可能 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 1+0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ より，

$\frac{1}{3}=3(1-a)^2$　$a=\frac{2}{3}$ ，$\frac{4}{3}$

①より　$a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{26}{27}$ または，$a=\frac{4}{3}$，$b=\frac{28}{27}$