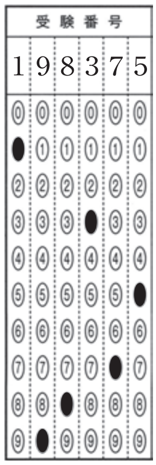
令和４年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学

マーク式解答用紙
受験番号記入例　※1



記述式解答用紙
受験番号記入例　※2

受験番号	１９８３７５

解答についての注意点

1　解答用紙は，マーク式解答用紙と記述式解答用紙の２種類があります。

2　大問$\boxed{1}$，大問$\boxed{2}$については，マーク式解答用紙に，
大問$\boxed{3}$，大問$\boxed{4}$については，記述式解答用紙に記入してください。

3　解答用紙が配付されたら，まずマーク式解答用紙に受験番号等を記入し，受験番号に対応する数字を，右の記入例に従って，鉛筆で黒くぬりつぶしてください。※1
記述式解答用紙は，全ての用紙の上部に受験番号のみを記入してください。※2

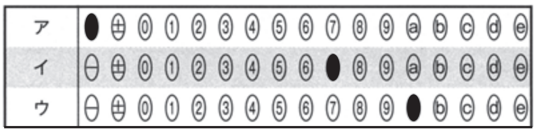
4　大問$\boxed{1}$，大問$\boxed{2}$については，次のマーク式解答用紙への解答上の注意をよく読んで解答してください。

マーク式解答用紙への解答上の注意

（1）　解答は，マーク式解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしてください。間違ってマークしたときは，消しゴムできれいに消してください。

（2）　問題の文中の$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$などには，特に指示のないかぎり，符号（−，±），数字（0 〜 9），または文字（a 〜 e）が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらをマーク式解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークしてください。

例　$\boxed{\text{アイウ}}$に $-7a$ と答えたいとき



なお，同一の問題文中に$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$などが２度以上現れる場合，２度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$のように細枠で表記します。

（3）　分数の形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えてください。

また，それ以上約分できない形で答えてください。

例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

（4）　小数の形で解答する場合，指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入して答えてください。
また，必要に応じて，指定された桁まで⓪にマークしてください。

例えば，$\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}$ に 2.9 と答えたいときは，2.90 として答えてください。

（5）　根号を含む形で解答する場合，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えてください。

例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

（6）　比の形で解答する場合，最も簡単な整数比で答えてください。

例えば，1：3 と答えるところを，2：6 のように答えてはいけません。

5　その他，係員が注意したことをよく守ってください。

指示があるまで中をあけてはいけません。

$\boxed{1}$ (1) $4x-3y=20$ …① を満たす整数 x, y について，$0 \leqq x+y \leqq 100$ を満たす整数 x, y の組の数を求める。

$x=\boxed{ア}$, $y=\boxed{イ}$ は①を満たしており，$4\times\boxed{ア}-3\times\boxed{イ}=20$ …②が成り立つ。

①と②より，$\boxed{ウ}\left(x-\boxed{ア}\right)=\boxed{エ}\,y$ と変形できる。k を整数とすると，

$$\begin{cases} x=\boxed{オ}\,k+\boxed{カ} \\ y=\boxed{キ}\,k \end{cases}$$

と表すことができる。よって，$0 \leqq x+y \leqq 100$ を満たす整数 x, y の組は $\boxed{クケ}$ 組ある。

(2) i を虚数単位とする。$z=-\dfrac{14}{3+\sqrt{5}\,i}$ のとき，$z^4+4z^3-20z-22$ の値を求める。

z を計算すると，$z=\boxed{コサ}+\sqrt{\boxed{シ}}\,i$ となる。

これを変形すると，$z^2+\boxed{ス}\,z+\boxed{セソ}=0$ となる。

また，$z^4+4z^3-20z-22$ を $z^2+\boxed{ス}\,z+\boxed{セソ}$ で割ったときの余りは，$\boxed{タチ}\,z+\boxed{ツ}$ となるので，$z^4+4z^3-20z-22=\boxed{テトナ}+\boxed{ニヌ}\sqrt{\boxed{ネ}}\,i$ である。

$\boxed{2}$ (1) 関数 $y = |x^2 - 4| - 2x$ $(-3 \leqq x \leqq 3)$ は $x =$ $\boxed{ア}$ のとき，最小値 $\boxed{イウ}$ である。

(2) 6 個の数字 1，2，3，4，5，6 のすべてを重なりなく使用してできる 6 桁の数を，小さい順に並べるとき，

(ア) 初めて 300000 以上になる数は小さい方から数えると $\boxed{エオカ}$ 番目である。

(イ) 小さい方から数えて 300 番目の数の一の位は $\boxed{キ}$ である。

(3) 点 O を中心とする円に内接する△ABC おいて，AB = 2，BC = 6，CA = 5 であるとき，$\angle AOB = \alpha$ とおくと，$\cos \alpha = \dfrac{\boxed{クケコ}}{\boxed{サシス}}$ となる。ただし，$0 < \alpha < \pi$ とする。

(4) 実数 t が $0 \leqq t \leqq 4$ を動くとき，方程式 $x^2 + y^2 - 2tx - 2y + t^2 - 3 = 0$ が表す図形が通過する領域と，不等式 $y \leqq 0$ が表す領域との共通部分の面積は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\pi + \boxed{タ} - \sqrt{\boxed{チ}}$ である。

ただし，円周率を π とする。

(5) a，b は実数とする。初項 a，公比 b の等比数列において，初項から第 4 項までの和は -15 であり，初項から第 8 項までの和は -255 である。また，初項 a，公差 b の等差数列の初項から第 4 項までの和は 0 である。このとき，$a =$ $\boxed{ツ}$，$b =$ $\boxed{テ}$ である。

$\boxed{ツ}$ 及び $\boxed{テ}$ について，下の⓪～⑧のうちから当てはまるものを一つずつ選べ。

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ −1　⑥ −2　⑦ −3　⑧ −4

(6) △OAB において，辺 OA を 5 : 4 に内分する点を C，辺 OB を 1 : 7 に内分する点を D，線分 AD と線分 BC との交点を E とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とすると，$\overrightarrow{OE} = \dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニヌ}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノハ}}\vec{b}$ と表すことができる。

(7) あるアクリル板を 1 枚通るたびに，光線はその強さを 20 % 失う。

このアクリル板を $\boxed{ヒフ}$ 枚以上重ねると，これを通ってきた光線の強さがもとの強さの 1 % 以下になる。$\log_{10} 2 = 0.3010$ として，$\boxed{ヒフ}$ に当てはまる最小の数値を答えよ。

(8) a を実数とする。3 次方程式 $\dfrac{1}{3}x^3 - ax + a = 0$ が異なる 3 つの実数解を持つための必要十分条件は $a > \dfrac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}$ である。

3 (1) a, b, c が正の実数で，$a \neq 1$, $c \neq 1$ のとき，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) (ア) $f(x) = \log(\tan x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(イ) $\dfrac{\pi}{6} < p < q < \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$2 \leqq \frac{\log(\tan q) - \log(\tan p)}{q - p} < \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

が成り立つことを証明せよ。

4 n を 2 以上の自然数とし，曲線 $y = x^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を S とする。

(1) 曲線 $y = x^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ 上の点を $\mathrm{P}(t, t^n)$ とし，P から直線 $y = x$ に下ろした垂線と直線 $y = x$ との交点を H とする。原点を O とするとき，線分 PH および線分 OH の長さを t を用いて表せ。

(2) S を直線 $y = x$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V_n を n を用いて表せ。
ただし，円周率を π とする。

(3) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} V_n$ の値を求めよ。

【計算用紙】

（必要に応じて使用すること）

令和4年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

三次選考択一問題の正答について

校種	高等学校	教科・科目	数学

問題番号	解答記号	正解	問題番号	解答記号	正解
1	ア，イ	5，0	2	ア	2
	ウ	4		イウ	−4
	エ	3		エオカ	241
	オ，カ	3，5		キ	1
	キ	4		$\frac{\text{クケコ}}{\text{サシス}}$	$\frac{161}{200}$
	クケ	14		$\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}\pi+\text{タ}-\sqrt{\text{チ}}$	$\frac{4}{3}\pi+4-\sqrt{3}$
	$\text{コサ}+\sqrt{\text{シ}}\,i$	$-3+\sqrt{5}\,i$		ツ，テ	③，⑥
	ス、セソ	6，14		$\frac{\text{トナ}}{\text{ニヌ}}, \frac{\text{ネ}}{\text{ノハ}}$	$\frac{35}{67}, \frac{4}{67}$
	$\text{タチ}z+\text{ツ}$	$20z+6$		ヒフ	21
	$\text{テトナ}+\text{ニヌ}\sqrt{\text{ネ}}\,i$	$-54+20\sqrt{5}\,i$		$\frac{\text{ヘ}}{\text{ホ}}$	$\frac{9}{4}$

受験番号	

令和4年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち１）

（（１）は解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

3

得点	

（１）

$x = \log_a b$ とおくと，$a^x = b$

$c \neq 1$ なので，両辺cを底とする対数をとると，

$$\log_c a^x = \log_c b \Leftrightarrow x \log_c a = \log_c b$$

ここで，$a \neq 1$ より，$\log_c a \neq 0$ なので，$x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

よって，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

／

受験番号	

令和4年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち２）

（（２）の（イ）は解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること
（２）の（ア）は答えのみでよい）

$\boxed{3}$　（続き）

（２）（ア）

$$f'(x)=\frac{2}{\sin 2x}$$

（イ）

（ア）の関数$f(x)$は区間$[p,\ q]$において連続かつ区間(p,q)において

微分可能なので，平均値の定理より，

$$\frac{\log(\tan q)-\log(\tan p)}{q-p}=\frac{2}{\sin 2c}\cdots①$$

$$p<c<q\cdots②$$

を満たす実数cが存在する。

条件と②より，$\frac{\pi}{6}<c<\frac{\pi}{3}$なので，$\frac{\pi}{3}<2c<\frac{2}{3}\pi$である。

これより，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin 2c\leqq 1$であることから，

$$2\leqq\frac{2}{\sin 2c}<\frac{4\sqrt{3}}{3}\cdots③$$

が成り立つ。よって，①と③より，

$$2\leqq\frac{\log(\tan q)-\log(\tan p)}{q-p}<\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

受験番号	

令和4年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち３）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

4

得点	

（１）

点と直線の距離の公式より，$\mathrm{PH}=\dfrac{|t-t^n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$で，$0\leqq t\leqq 1$ より，$\mathrm{PH}=\dfrac{t-t^n}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{\mathrm{OH}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\mathrm{PH}}{\sqrt{2}}=t$より，$\mathrm{OH}=\sqrt{2}t-\mathrm{PH}=\dfrac{t+t^n}{\sqrt{2}}$

（２）

$\mathrm{OH}=h$ とおくと，$0\leqq h\leqq\sqrt{2}$より，求める回転体の体積V_nは，

$$V_n=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(\mathrm{PH})^2dh$$

h	$0\to\sqrt{2}$
t	$0\to 1$

$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{1+nt^{n-1}}{\sqrt{2}}$ より，

$$V_n=\pi\int_0^1\left(\frac{t-t^n}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1+nt^{n-1}}{\sqrt{2}}dt$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1\{t^2+(n-2)t^{n+1}+(1-2n)t^{2n}+nt^{3n-1}\}dt$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{t^3}{3}+\frac{n-2}{n+2}t^{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}t^{2n+1}+\frac{1}{3}t^{3n}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{n-2}{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}+\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi$$

受験番号	

令和４年度大阪府公立学校教員採用選考テスト

高等学校　数学　解答用紙　（４枚のうち４）

（解答及び解答に至る過程はすべて，解答用紙に記入すること）

4　（続き）

（３）

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{n-2}{n+2} + \frac{1-2n}{2n+1} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}} + \frac{\frac{1}{n}-2}{2+\frac{1}{n}} + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\pi$$